OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

DO

Dr. F. Gomes Teixeira

DIRECTOR DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO,
ANTIGO PROFESSOR NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, ETC.

PUBLICADAS

POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÊS

VOLUME SEGUNDO

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1906

I

NOTES SUR DEUX TRAVAUX D'ABEL RELATIFS A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENCES FINIES

Niels Henrik Abel in memoriam

(Acta Mathematica, t. XXVIII — Stockolm, 1904)

NOTES SUR DEUX TRAVAUX D'ABEL RELATIFS A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENCES FINIES (¹)

I

1. Le premier des travaux d'Abel que nous allons considérer, fut publié dans le *Magazin for Naturvirdenskaberne* (Christiania, t. II, 1823). Dans la troisième partie de ce travail (*Œuvres complètes*, 1881, t. I, pag. 21) donne le grand analyste la formule suivante:

$$(1) \qquad \Sigma\varphi(x) = \int\varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_0^\infty \frac{\varphi\left(x + \frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}i\right)}{2i} \cdot \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} + C,$$

où $\Sigma\varphi(x)$ représente l'intégrale finie de $\varphi(x)$ et C une constante arbitraire, et en fait application à la détermination de quelques intégrales définies, qui avaient été considérées par Legendre dans ses *Exercices de Calcul intégral,* parmi lesquelles se trouve la suivante:

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}.$$

C'est de cette formule (1) que nous allons premièrement nous occuper, pour en faire une nouvelle application, en démontrant au moyen d'elle et de (2) la formule qui donne l'expression de la dérivée d'ordre quelconque des fonctions de e^x, connue par le nom de *formule d'Herschell.*

(¹) Este trabalho foi publicado em um dos volumes das *Acta Mathematica*, consagrados á memoria de Abel, que foram publicados na occasião do primeiro centenario do nascimento d'este grande geometra.

Appliquons, pour cela, la formule (1) à la fonction $e^{ux}x^{2n}$, n étant un nombre entier positif et u un nombre quelconque, et remarquons que, au moyen de l'intégration par parties, on trouve

$$\Sigma e^{ux} x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1} x^{2n} - \Sigma \frac{e^{u(x+1)}}{e^u - 1} \Delta x^{2n},$$

et par conséquent

$$\Sigma e^{ux} x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1} \left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta x^{2n} + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^2 \Delta^2 x^{2n} - \ldots + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n} \Delta^{2n} x^{2n} \right].$$

En posant alors

$$P = x^{2n} - \binom{2n}{2} \frac{x^{2n-2}}{2^2} t^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} t^{2n},$$

$$Q = 2n \frac{x^{2n-1}}{2} t - \binom{2n}{3} \frac{x^{2n-3}}{2^3} t^3 + \ldots,$$

on trouve

$$\int_0^\infty \left(P \sin \frac{ut}{2} + Q \cos \frac{ut}{2} \right) \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^u - 1} \left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta x^{2n} + \ldots + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n} \Delta^{2n} x^{2n} \right]$$
$$- \left[\frac{x^{2n}}{u} - \frac{2n x^{2n-1}}{u^2} + \ldots + \frac{1.2\ldots 2n}{u^{2n+1}} \right] + \frac{1}{2} x^{2n} + C e^{-ux}.$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de cette identité doivent être égaux. En considérant premièrement ceux de x^{2n} on trouve l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{u^{2n}}{1.2\ldots 2n} C,$$

qui, à cause de la formule (2), fait voir que $C = 0$. Et, en y posant ensuite $x = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} e^u}{(e^u - 1)^2} \left[\Delta 0^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta^2 0^{2n} \right.$$
$$\left. + \ldots - \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n-1} \Delta^{2n} 0^{2n} \right] + (-1)^{n+1} 2^{2n} \frac{1.2\ldots 2n}{u^{2n+1}}.$$

En appliquant la formule (1) à la fonction $x^{2n-1}e^{ux}$, on trouve de la même manière

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\cos\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = (-1)^n \frac{2^{2n-1}e^u}{(e^u-1)^2}\left[\Delta 0^{2n-1} - \frac{e^u}{e^u-1}\Delta^2 0^{2n-1}\right.$$
$$\left. + \dots + \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{2n-2}\Delta^{2n-1}0^{2n-1}\right] - (-1)^n 2^{2n-1}\frac{1.2\dots(2n-1)}{u^{2n}}.$$

Mais, d'un autre côté, en dérivant les deux membres de l'égalité (2), par rapport à u, $2n-1$ et $2n$ fois, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\cos\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = (-1)^{n-1}2^{2n-1}\left[\frac{1.2\dots(2n-1)}{u^{2n}} + \frac{d^{2n-1}(e^u-1)^{-1}}{du^{2n-1}}\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n}\sin\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = (-1)^{n+1}2^{2n}\left[\frac{1.2\dots 2n}{u^{2n+1}} - \frac{d^{2n}(e^u-1)^{-1}}{du^{2n}}\right].$$

De ces deux égalités et des deux précédentes on tire la suivante:

$$\frac{d^m(e^u-1)^{-1}}{du^m} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^2}\left[\Delta 0^m - \frac{e^u}{e^u-1}\Delta^2 0^m + \dots \pm \left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{m-1}\Delta^m 0^m\right].$$

Maintenant il n'a qu'un pas à donner pour obtenir la dérivée d'ordre m de $y=f(e^u)$ par rapport à u. Il suffit qu'on forme quelques dérivées successives de $f(e^u)$ pour remarquer qu'on a

$$y^{(m)} = f'(e^u)e^u + Af''(e^u)e^{2u} + Bf'''(e^u)e^{3u} + \dots + f^{(m)}(e^u)e^{mu},$$

A, B, ... étant des nombres, qui ne dépendent pas de la fonction considérée, et qu'on peut, par conséquent, obtenir au moyen d'une fonction particulière. En appliquant, pour cela, cette formule à la fonction $(e^u-1)^{-1}$, on trouve

$$y^{(m)} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^2}\left[1 - 1.2A\frac{e^u}{e^u-1} + 1.2.3B\left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^2 - \dots \pm 1.2\dots m\left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{m-1}\right].$$

On a donc

$$A = \frac{1}{1.2}\Delta^2 0^m,\quad B = \frac{1}{1.2.3}\Delta^3 0^m,\quad C = \frac{1}{1.2.3.4}\Delta^4 0^m,\quad \dots,$$

et, par conséquent,

$$y^m = f'(e^h)\,e^h + \frac{\Delta^2 0^m}{1.2} f''(e^h)\,e^{2h} + \frac{\Delta^3 0^m}{1.2.3} f'''(e^h)\,e^{3h} + \ldots + f^{(m)}(e^h)\,e^{mh},$$

qui est la *formule d'Herschell.*

II

2. Le second travail d'Abel, que nous allons considérer, fut publié pour la première fois après sa mort, et se trouve dans le tome II, p. 1, des *Œuvres complètes.* Il y donne la représentation de l'intégrale finie $\Sigma \frac{1}{x^\alpha}$ par une intégrale définie, au moyen de laquelle il l'étudie. Ici nous allons étudier la même fonction en prenant pour point de départ une série qui la représente, et en appliquant les méthodes da la théorie des fonctions analytiques.

Considérons la série

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+x)^\alpha} \right],$$

où α représente un nombre positif quelconque, laquelle contient comme cas particulier quelques-unes qu'on trouve dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$, qui correspondent aux valeurs entières de α, et supposons que m^α représente une quelconque des valeurs que prend z^α, quand $z = m$, et qu'on détermine $(m+x)^\alpha$ par la condition de se réduire à la valeur choisie pour m^α, quand $x = 0$.

Cela posé, nous allons démontrer que la série considérée est *uniformément convergente* dans une aire A, limitée par un contour quelconque, laquelle ne contienne aucun des points d'affixes $-1, -2, -3, \ldots$

Pour cela nous remarquerons premièrement que, si n est le premier nombre entier supérieur à la plus grande des valeurs que prend le módule de x dans l'aire A, il suffit qu'on démontre qu'est uniformément convergente dans cette aire la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+x)^\alpha} \right],$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{m^\alpha \left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^\alpha - 1 \right]}{m^\alpha (m+x)^\alpha}$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\lambda x \left(1+\theta \frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}}{m(m+x)^{\alpha}},$$

où $\lambda \overline{\overline{<}} 1, \quad 0<\theta<1$.

Or il est facile de voir qu'il existe un nombre M, que le módule de $\lambda x \left(1+\theta \frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}$ ne peut pas surpasser, quand x varie, sans sortir de l'aire A, et m prend les valeurs $n+1$, $n+2$, ... En effet, si $\alpha > 1$, on a

$$\left|1+\theta \frac{x}{m}\right|^{\alpha-1} \overline{\overline{<}} \left(1+\theta \left|\frac{x}{m}\right|\right)^{\alpha-1} < 2^{\alpha-1}$$

quand $m>n$ et $|x|<n$; et, si $\alpha<1$, on a, en supposant encore $m>n$ et $|x|<n$,

$$\left|1+\theta \frac{x}{m}\right|^{1-\alpha} > \left(1+\theta \left|\frac{x}{m}\right|\right)^{1-\alpha} > 1-\frac{n}{n+1}$$

et par conséquent $\left|1+\theta \frac{x}{m}\right|^{\alpha-1} < n+1$.

Nous avons donc

$$\left|\frac{\lambda x \left(1+\theta \frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}}{m(m+x)^{\alpha}}\right| < \frac{M}{m|m+x|^{\alpha}} < \frac{M}{m(m-|x|)^{\alpha}} < \frac{M}{(m-n)^{\alpha+1}}.$$

Mais la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{M}{(m-n)^{\alpha+1}}$$

est convergente. La série (1) est donc *uniformément convergente dans l'aire considérée* A, et elle définit, par conséquent, une fonction $L_1(x)$, que nous allons étudier.

3. Soit x_0 l'affixe d'un point quelconque de l'aire A. Chacun des termes de la série (1) peut être développé en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-x_0$, convergente à l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'affixe x_0 et dont le rayon R est égal ou supérieur à la distance de ce point à celui des points d'affixe $-1, -2, -3, \ldots$ qui en est plus prochain. Mais, d'une autre côté, la série (1) est uniformément convergente

dans tout cercle de centre x_0 et de rayon inférieur à R. En appliquant un théorème de Weierstrass bien connu, on voit donc que la fonction définie par la série (1) peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $x-x_0$, convergente à l'intérieur du cercle de rayon R; et que, par conséquent, elle est *regulière* en tous les points différents de -1, $-2, -3, \ldots$

Il convient encore remarquer que $-1, -2, -3, \ldots$ sont des *points critiques* de la fonction considérée et qu'on a

$$L_1(x) = -\frac{1}{(x+n)^\alpha} + P(x+n), \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots)$$

$P(x+n)$ répresentant un développement ordonné suivant les puissances de $x+n$ qu'il est facile d'obtenir, et que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'affixe $-n$ et dont le rayon est égal à l'unité.

4. En développant $L_1(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de x, on trouve le résultat

$$L_1(x) = \alpha S_{\alpha+1}\, x - \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} S_{\alpha+2}\, x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} S_{\alpha+3}\, x^3 - \ldots,$$

en posant

$$S_t^{\beta} = 1 + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t} + \frac{1}{4^t} + \ldots,$$

laquelle est convergente à l'intérieur de la circonférence de centre 0 et de rayon égal à l'unité.

On tire de cette égalité les suivantes:

$$L_1'(0) = \alpha S_{\alpha+1}, \quad L_1''(0) = -\alpha(\alpha+1) S_{\alpha+2}, \ \ldots$$

dont nous allons faire usage en cherchant le développement de la même fonction en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{x}{x+2}$.

Pour cela, remarquons, en premier lieu, que la droite tirée par le point d'affixe -1, perpendiculairement à l'axe des abscisses, divise le plan de représentation des x en deux demiplans et que, dans celui qui contient le point d'affixe 0, la fonction $L_1(x)$ est holomorphe. En appliquant maintenant un théorème que nous avons démontré dans le *Journal de Crelle*

(t. CXXII, p. 98), on conclut que la fonction $L_1(x)$ peut être développée en série de la forme

$$L_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x}{x+2}\right)^n,$$

convergente dans ce demi-plan. On détermine A_n au moyen de la formule

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \left| \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(L_1(x)(x+2)^n \right) \right|_{x=0},$$

qui donne

$$A_n = 2L_1'(0) + (n-1)\frac{2^2}{1.2} L_1''(0) + \binom{n-1}{2} \frac{2^3}{1.2.3} L_1'''(0) + \ldots + \frac{2^n}{1.2\ldots n} L_1^{(n)}(0),$$

ou

$$A_n = 2\alpha S_{\alpha+1} - (n-1)\frac{2^2}{1.2}\alpha(\alpha+1)S_{\alpha+2} + \binom{n-1}{2}\frac{2^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)S_{\alpha+3}$$
$$- \ldots \pm \frac{2^n}{1.2\ldots n}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)S_{\alpha+n}.$$

5. En dérivant n fois la série (1) par rapport à x, il vient

$$L_1^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-x)^{\alpha+n}}.$$

Donc entre la dérivée d'ordre n de $L_1(x, \alpha)$ et la fonction $L_1(x, \alpha+n)$ existe la rélation

$$L_1^{(n)}(x, \alpha) = (-1)^n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\left[L_1(x, \alpha+n) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha+n}}\right].$$

6. Nous avons supposé jusqu'ici que les binômes qui entrent dans la série (1) sont des branches quelconques des fonctions qu'ils représentent. En nous plaçant maintenant dans un point de vue plus particulier, nous supposerons qu'on choisit les valeurs des quantités 1^α, 2^α, 3^α, ..., qui entrent dans cette série, de manière qu'elles coïncident avec celles que prend, dans les points d'affixe 1, 2, 3, ..., une branche uniforme de la fonction x^α, déterminée par une certaine valeur initiale et par une coupure, qui parte du point d'affixe 0 et

que x ne puisse travesser, et qu'on prend pour valeurs des binomes $(1+x)^q$, $(2+x)^q$, $(3+x)^q$, ... dans chaque point celles que prend la même branche de x^q dans les points $1+x$, $2+x$, $3+x$, ... Alors, si l'on change dans la série (1) x en $x+1$ et si l'on représente par K_a et K'_a les sommes des a premiers termes des deux séries, on a

$$K'_a - K_a = \frac{1}{(1+x)^q} - \frac{1}{(a+1+x)^q},$$

et, par conséquent, en posant $a = \infty$,

$$L_1(x+1) - L_1(x) = \frac{1}{(1+x)^q}.$$

La fonction $L_1(x)$ représente donc l'intégrale finie de $\frac{1}{(1+x)^q}$, et $L_1(x-1)$ celle de $\frac{1}{x^q}$. La fonction $L_1(x-1)$ coincide donc, dans le cas particulier maintenant considéré, avec la fonction $L(x)$ de Abel.

II

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

(Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomomicas, tomos I e II.
Coimbra, 1877 e 1878)

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

1. Toute fraction rationnelle de x peut être décomposée en un polynôme entier et en une fraction dont le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur.

Cette fraction peut être encore décomposée, comme on sait, en d'autres, dont les dénominateurs sont des puissances d'un binôme du premier degré en x. Beaucoup de géomètres se sont occupés de la détermination des numérateurs de ces fractions, et ont même donné des formules générales pour les trouver, mais ces formules font dépendre les numérateurs les uns des autres.

Le savant géomètre M. Hermite a donné, dans son *Cours d'Analyse,* des formules directes pour trouver les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles ou peut décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}}$.

Le but de ce travail est de généraliser cette doctrine, pour donner une forme, que je crois nouvelle, aux formules qui donnent les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles on décompose une fraction rationnelle, forme qui a l'avantage de donner ces numérateurs independamment les uns des autres. Les formules, auxquelles je parviens, contiennent les formules de M. Hermite comme cas particulier.

2. Toute fraction rationnelle propre, après avoir été réduite à son expression la plus simple, peut être décomposée de la manière suivante:

$$
\begin{aligned}
\frac{F_1(x)}{F(x)} = & \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} \\
& + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{L_1}{(x-a_n)} + \frac{L_2}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-a_n)^\lambda}.
\end{aligned}
$$

$A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots, L_1, L_2, \ldots$ étant des constantes, et

$$F(x) = (x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_n)^\lambda.$$

Le problème à résoudre est la détermination des quantités $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, L_1, L_2, \ldots$

Nous supposerons premièrement $F_1(x) = 1$.

Évidemment

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{1}{a_1-a_2} \cdot \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{a_2-a_1} \cdot \frac{1}{x-a_2};$$

donc, en multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{x-a_2}$, et en appliquant ensuite la formule précédente aux produits $\frac{1}{(x-a_1)(x-a_3)}$ et $\frac{1}{(x-a_2)(x-a_3)}$, il vient

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} = \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} \cdot \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} \cdot \frac{1}{x-a_2}$$
$$+ \frac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \cdot \frac{1}{x-a_3}.$$

En continuant de la même manière, on obtient en général la formule suivante:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = {} & \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} \cdot \frac{1}{x-a_1} \\ & + \frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} \cdot \frac{1}{x-a_2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} \cdot \frac{1}{x-a_n}. \end{aligned} \right.$$

Mais, d'un antre côté,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{x-a_1-h_1} &= \frac{1}{x-a_1} + \frac{h_1}{(x-a_1)^2} + \frac{h_1^2}{(x-a_1)^3} + \ldots + \frac{h_1^{\alpha-1}}{(x-a_1)^\alpha} + \ldots \\ \frac{1}{x-a_2-h_2} &= \frac{1}{x-a_2} + \frac{h_2}{(x-a_2)^2} + \frac{h_2^2}{(x-a_2)^3} + \ldots + \frac{h_2^{\beta-1}}{(x-a_2)^\beta} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{x-a_n-h_n} &= \frac{1}{x-a_n} + \frac{h_n}{(x-a_n)^2} + \frac{h_n^2}{(x-a_n)^3} + \ldots + \frac{h_n^{\lambda-1}}{(x-a_n)^\lambda} + \ldots \end{aligned} \right.$$

et

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_2+h_2)}=\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{h_2-h_1}{(a_1-a_2)^2}+\frac{(h_2-h_1)^2}{(a_1-a_2)^3}+\dots$$

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_3+h_3)}=\frac{1}{a_1-a_3}+\frac{h_3-h_1}{(a_1-a_3)^2}+\frac{(h_3-h_1)^2}{(a_1-a_3)^3}+\dots$$

. . . .

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_n+h_n)}=\frac{1}{a_1-a_n}+\frac{h_n-h_1}{(a_1-a_n)^2}+\frac{(h_n-h_1)^2}{(a_1-a_n)^3}+\dots$$

En remarquant que le coefficient de $h^m k^n$ dans le développement de $(k-h)^{m+n}$ est $(-1)^m[(m+n)Cn]$, les formules précédentes se transforment dans les suivantes:

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{a_1+h_1-(a_2+h_2)}=\dfrac{1}{a_1-a_2}+\dfrac{h_2-h_1}{(a_1-a_2)^2}+\dots\\[2ex] \qquad+\sum(-1)^{\delta'}\cdot\dfrac{[(\delta'+\beta-1)C\delta']}{(a_1-a_2)^{\delta'+\beta}}h_1^{\delta'}h_2^{\beta-1}+\dots,\\[3ex] \dfrac{1}{a_1+h_1-(a_3+h_3)}=\dfrac{1}{a_1-a_3}+\dfrac{h_3-h_1}{(a_1-a_3)^2}+\dots\\[2ex] \qquad+\sum(-1)^{\delta''}\cdot\dfrac{[(\delta''+\gamma-1)C\delta'']}{(a_1-a_3)^{\delta''+\gamma}}h_1^{\delta''}h_3^{\gamma-1}+\dots,\\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\[2ex] \dfrac{1}{a_1+h_1-(a_n+h_n)}=\dfrac{1}{a_1-a_n}+\dfrac{h_n-h_1}{(a_1-a_n)^2}+\dots\\[2ex] \qquad+\sum(-1)^{\delta^{(n-1)}}\cdot\dfrac{[(\delta^{(n-1)}+\lambda-1)C\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\delta^{(n-1)}+\lambda}}h_1^{\delta^{(n-1)}}h_3^{\lambda-1}+\dots,\end{cases}$$

dans lesquelles δ', δ'', ..., $\delta^{(n-1)}$ peuvent avoir toutes les valeurs entières et positives.

En substituant les développements (2) et (3) dans la formule (1), après avoir changé en celle-ci: a_1 en a_1-h_1, a_2 en a_2-h_2, a_3 en a_3-h_3, etc., et en égalant les coefficients de $h_1^{\alpha-1}h_2^{\beta-1}h_3^{\gamma-1}\dots h_n^{\lambda-1}$ dans les deux membres, on obtient une équation, dont le premier membre est $\dfrac{1}{F(x)}$ et dont le deuxième membre est une somme de fractions simples, dans lesquelles $\dfrac{1}{F(x)}$ se peut décomposer.

On trouve ainsi que le numérateur de la première fraction, c'est à dire de la fraction $\frac{A_1}{x-a_1}$, est

$$(4) \qquad A_1 = (-1)^{\alpha-1} \Sigma \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}},$$

en étendant le Σ à toutes les valeurs entières et positives, qui satisfont à l'équation indéterminée:

$$(5) \qquad \delta'+\delta''+\delta'''+\ldots+\delta^{(n-1)} = \alpha-1.$$

Le numérateur de la fraction $\frac{A_2}{(x-a_1)^2}$ peut être obtenu de la même manière. Nous avons dans ce cas:

$$A_2 = (-1)^{\alpha-2} \Sigma \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}},$$

où

$$\delta'+\delta''+\delta'''+\ldots+\delta^{(n-1)} = \alpha-2.$$

En général, le numérateur de $\frac{A_i}{(x-a_1)^i}$ est donné par la formule

$$(6) \qquad A_i = (-1)^{\alpha-i} \Sigma \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}},$$

en posant

$$\delta'+\delta''+\delta'''+\ldots+\delta^{(n-1)} = \alpha-i.$$

Pour trouver les numérateurs des fractions $\frac{B_1}{(x-a_2)}, \frac{B_2}{(x-a_2)^2}, \ldots, \frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}$ il suffit de changer dans les formules précédentes α en β et a_1 en a_2.

De la même manière on trouve les numérateurs des fractions $\frac{C_1}{x-a_3}, \frac{C_2}{(x-a_3)^2}, \ldots, \frac{C_\gamma}{(x-a_2)^\gamma}$ en changeant dans les formules antérieures: α en γ, et a_1 en a_3.

En continuant de la même manière on obtient tous les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles on peut décomposer la fraction $\frac{1}{F(x)}$.

En faisant dans le formule (6) $a_1 = a$, $a_2 = b$, $\gamma = 0$, ..., $\lambda = 0$, on obtient pour A_1, A_2, ... les expressions

$$(-1)^{\alpha-1}\frac{[(\beta+\alpha-2)C(\alpha-1)]}{(a-b)^{\alpha+\beta-1}}, \quad (-1)^{\alpha-2}\frac{[(\beta+\alpha-3)C(\alpha-2)]}{(a-b)^{\alpha+\beta-2}}, \ldots$$

qui s'accordent avec les formules qui se lisent dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, en changeant α en $\alpha-1$ et β en $\beta-1$.

On aurait pu aussi déduire ces formules des formules connues:

$$1 = A_{(\alpha)}\cdot\frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2.1},$$

$$0 = A_{(\alpha)}\cdot\frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\alpha\ldots 2} + A_{(\alpha-1)}\cdot\frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2},$$

$$0 = A_{(\alpha)}\cdot\frac{F^{(\alpha+2)}(a_1)}{(\alpha+2)(\alpha+1)\ldots 3} + A_{(\alpha-1)}\cdot\frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\alpha\ldots 3} + A_{(\alpha-2)}\cdot\frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha\ldots 3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = A_{(\alpha)}\cdot\frac{F^{(2\alpha-1)}(a_1)}{(2\alpha-1)\ldots\alpha} + A_{(\alpha-1)}\cdot\frac{F^{(2\alpha-2)}(a_1)}{(2\alpha-2)\ldots\alpha} + \ldots + A_1\cdot\frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha},$$

mais le calcul aurait été beaucoup plus compliqué.

3. On voit que, pour calculer les numérateurs A_1, A_2, A_3, ..., B_1, B_2, B_3, ..., nous avons premièrement à résoudre l'équation indéterminée:

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m,$$

où δ', δ'', δ''', ..., $\delta^{(n-1)}$ doivent être des nombres entiers et positifs, problème qui se présente en beaucoup de questions importantes d'analyse.

On peut, pour cela, suivre une règle due à Hindenbourg, que nous allons extraire des *Instituições Mathematicas* de [illegible], en renvoyant pour sa démonstration à cet excellent ouvrage.

En supposant

$$
\begin{aligned}
m_i &= i, \quad i+1, \; i+2, \; \ldots, \; m \\
m_i^{(2)} &= m_i, \quad m_{i+1}, \quad m_{i+2}, \quad \ldots, \; m_m \\
m_i^{(3)} &= m_i^{(2)}, \; m_{i+1}^{(2)}, \quad m_{i+2}^{(2)}, \quad \ldots, \; m_m^{(2)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

les racines de l'équation indéterminée seront donnés par les égalités symboliques:

$$
\begin{aligned}
&\delta' = m - m_0^{(n-2)}, \; \delta'' = m_0^{(n-2)} - m_0^{(n-3)}, \; \delta''' = m_0^{(n-3)} - m_0^{(n-4)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\delta^{(n-3)} = m_0^{(3)} - m_0^{(2)}, \quad \delta^{(n-2)} = m_0^{(2)} - m_0, \quad \delta^{(n-1)} = m_0,
\end{aligned}
$$

que l'on doit développer en ayant égard à la signification des symboles.

Si, par exemple, l'équation indéterminée est

$$x + y + z = 4,$$

il viendra

$$x = 4 - m_0^{(2)}, \; y = m_0^{(2)} - m_0, \; z = m_0$$

ou, ayant égard à la signification des symboles,

$$
\begin{aligned}
x &= 4 - m_0, \; y = m_0 \qquad, \; z = 0 \\
x &= 4 - m_1, \; y = m_1 - 1, \; z = 1 \\
x &= 4 - m_2, \; y = m_2 - 2, \; z = 2 \\
x &= 4 - m_3, \; y = m_3 - 3, \; z = 3 \\
x &= 4 - m_4, \; y = m_4 - 4, \; z = 4.
\end{aligned}
$$

La première ligne donne cinq systèmes de racines, la deuxième en donne quatre, la troisième en donne trois, etc. Ces solutions sont:

4, 0, 0	3, 1, 0	2, 2, 0
1, 3, 0	0, 4, 0	3, 0, 1
2, 1, 1	1, 2, 1	0, 3, 1
2, 0, 2	1, 1, 2	0, 2, 2
1, 0, 3	0, 1, 3	0, 0, 4.

Je vais exposer maintenant une autre règle, que je crois nouvelle, pour résoudre la même question, et qui est plus avantageuse pour notre but, parceque non seulement nous avons à résoudre l'équation

$$\mathfrak{z} + \mathfrak{z}' + \mathfrak{z}'' + \ldots + \mathfrak{z}^{(n-1)} = m,$$

mais encore les équations

$$\mathfrak{z}' + \mathfrak{z}'' + \mathfrak{z}''' + \ldots + \mathfrak{z}^{(n-1)} = m-1,$$
$$\mathfrak{z}' + \mathfrak{z}'' + \mathfrak{z}''' + \ldots + \mathfrak{z}^{(n-1)} = m-2,$$
$$\mathfrak{z}' + \mathfrak{z}'' + \mathfrak{z}''' + \ldots + \mathfrak{z}^{(n-1)} = m-3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour plus de clarté, nous allons raisonner sur un exemple, mais il est facile de voir que ce que nous allons dire est général.

Soit proposée l'équation

$$x + y + z + t = 4.$$

Écrivons premièrement

$$4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Écrivons ensuite devant chacun de ces chiffres ceux qui lui étant additionnés donnent 4 ou moins de 4. On obtient

4, 0; 3, 1; 3, 0; 2, 2; 2, 1; 2, 0; 1, 3;
1, 2; 1, 1; 1, 0; 0, 4; 0, 3; 0, 2; 0, 1; 0, 0.

Devant chacun de ces groupes mettons les chiffres qui étant additionnés aux chiffres du groupe donnent 4 ou moins de 4. Il vient

4, 0, 0	3, 1, 0	3, 0, 1	3, 0, 0	2, 2, 0
2, 1, 1	2, 1, 0	2, 0, 2	2, 0, 1	2, 0, 0
1, 3, 0	1, 2, 1	1, 2, 0	1, 1, 2	1, 1, 1
1, 1, 0	1, 0, 3	1, 0, 2	1, 0, 1	1, 0, 0
0, 4, 0	0, 3, 1	0, 3, 0	0, 2, 2	0, 2, 1
0, 2, 0	0, 1, 3	0, 1, 2	0, 1, 1	0, 1, 0
0, 0, 4	0, 0, 3	0, 0, 2	0, 0, 1	0, 0, 0.

Devant chacun de ces groupes mettons maintenant les chiffres qui additionnés à ceux de ce groupe donnent 4, et nous obtiendrons:

4, 0, 0, 0	3, 1, 0, 0	3, 0, 1, 0	3, 0, 0, 1
2, 2, 0, 0	2, 1, 1, 0	2, 1, 0, 1	2, 0, 0, 2
2, 0, 1, 1	2, 0, 0, 2	1, 3, 0, 0	1, 2, 1, 0
1, 2, 0, 1	1, 1, 2, 0	1, 1, 1, 1	1, 1, 0, 2
1, 0, 3, 0	1, 0, 2, 1	1, 0, 1, 2	1, 0, 0, 3
0, 4, 0, 0	0, 3, 1, 0	0, 3, 0, 1	0, 2, 2, 0
0, 2, 1, 1	0, 2, 0, 2	0, 1, 3, 0	0, 1, 2, 1
0, 1, 1, 2	0, 1, 0, 3	0, 0, 4, 0	0, 0, 3, 1
0, 0, 2, 2	0, 0, 1, 3	0, 0, 0, 4	

qui sont tous les système de racines entières et positives de l'équation proposée.

Il est convenable, pour voir si l'on a oublié quelque système de racines, de chercher une formule qui en donne le nombre. C'est ce que nous allons faire.

On sait par l'Algèbre que

$$[(m+n)\,\mathrm{C}n]=[(m+n-1)\,\mathrm{C}(n-1)]+[(m+n-2)\,\mathrm{C}(n-1)]+\dots$$
$$+[(m+n-q)\,\mathrm{C}(n-1)]+[(m+n-q)\,\mathrm{C}n],$$

d'où l'on déduit

$$[(m+2)\,\mathrm{C}2]=[(m+1)\,\mathrm{C}1]+[(m+2)\,\mathrm{C}1]+\dots+[2\mathrm{C}1]+1,$$
$$[(m+3)\,\mathrm{C}3]=[(m+2)\,\mathrm{C}2]+[(m+1)\,\mathrm{C}2]+\dots+[3\mathrm{C}2]+1,$$
$$[(m+4)\,\mathrm{C}4]=[(m+3)\,\mathrm{C}3]+[(m+2)\,\mathrm{C}3]+\dots+[4\mathrm{C}3]+1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[(m+n-2)\,\mathrm{C}(n-2)]=[(m+n-3)\,\mathrm{C}(n-3)]+[(m+n-4)\,\mathrm{C}(n-3)]+\dots+[n-1)\,\mathrm{C}(n-3)]+1.$$

Cela posé, considérons premièrement l'équation

$$\delta'+\delta''=m.$$

Le nombre de ses racines entières, positives ou nulles, est égal à $m+1$; et nous avons, par conséquent, en représentant ce nombre par N_2,

$$\mathrm{N}_2=m+1=[(m+1)\,\mathrm{C}1].$$

En considérant ensuite l'équation

$$\delta' + \delta'' + \delta''' = m,$$

et en remarquant que le nombre N_3 de ses racines est égal à la somme des nombres des racines des équations

$$\delta' + \delta'' = m,\ \delta' + \delta'' = m - 1,\ \delta' + \delta'' = m - 2,\ \ldots,\ \delta' + \delta'' = 0,$$

on trouve

$$N_3 = [(m+1)\,C\,1] + [m\,C\,1] + [(m-1)\,C\,1] + \ldots + [2\,C\,1] + 1,$$

et, par conséquent,

$$N_3 = [(m+2)\,C\,2].$$

En continuant de la même manière, on est conduit à poser

$$N_{n-2} = [(m+n-3)\,C\,(n-3)],$$

où N_{n-2} représente le nombre des racines de l'équation

$$\delta' + \delta'' + \ldots + \delta^{(n-2)} = m.$$

Pour établir cette formule, nous la supposerons vraie, et nous allons démontrer qu'elle subsiste quand l'équation proposée est

$$\delta' + \delta'' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m.$$

Pour cela, il suffit qu'on remarque que le nombre des racines de cette équation est égal la somme des nombres des racines des équations

$$\delta' + \delta'' + \ldots + \delta^{(n-2)} = m,$$
$$\delta' + \delta'' + \ldots + \delta^{(n-2)} = m - 1,$$
$$\delta' + \delta'' + \ldots + \delta^{(n-2)} = m - 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta' + \delta'' + \ldots + \delta^{(n-2)} = 0,$$

et qu'on a, par conséquent,

$$N_{n-1} = [(m+n-3)\,C\,(n-3)] + [(m+n-2)\,C\,(n-3)] + \ldots + [(n-1)\,C\,(n-3)] + 1,$$

ou

$$N_{n-1} = [(m + n - 2) C (n - 2)].$$

Cette formule donne donc le nombre des racines entières, positives ou nulles de l'équation indéterminée considérée.

Dans l'exemple proposé nous avons $m = 4$ et $n = 5$, donc $N_3 = 35$.

Après avoir résolu l'équation $x + y + z + t = 4$, pour résoudre l'équation $x + y + z + t = 3$, il n'est pas nécessaire de répéter tout le calcul précédent, parceque il suffit dans les groupes de trois chiffres de joindre à chacun un chiffre tel que la somme des quatre chiffres du groupe soit égale à 3. Il vient ainsi

3, 0, 0, 0	2, 1, 0, 0	2, 0, 1, 0	2, 0, 0, 1
1, 2, 0, 0	1, 1, 1, 0	1, 1, 0, 1	1, 0, 2, 0
1, 0, 1, 1	1, 0, 0, 2	0, 3, 0, 0	0, 2, 1, 0
0, 2, 0, 1	0, 1, 2, 0	0, 1, 1, 1	0, 1, 0, 2
0, 0, 3, 0	0, 0, 2, 1	0, 0, 1, 2	0, 0, 0, 3.

Pour résoudre l'équation

$$x + y + z + t = 2$$

il suffit de poser devant chaque groupe de trois chiffres un chiffre qui additionné à ceux du groupe donne 2, et il vient:

2, 0, 0, 0	1, 1, 0, 0	1, 0, 1, 0	1, 0, 0, 1	0, 2, 0, 0
0, 1, 1, 0	0, 1, 0, 1	0, 0, 2, 0	0, 0, 1, 1	0, 0, 0, 2.

De la même manière on obtient les systèmes de racines de l'équation

$$x + y + z + t = 1,$$

qui sont

1, 0, 0, 0   0, 1, 0, 0   0, 0, 1, 0   0, 0, 0, 1.

Comme application de cette doctrine, décomposons en fraction simples la fraction rationnelle suivante:

$$\frac{1}{x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 2x} = \frac{1}{(x-1)^4 (x-2) x}$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_4}{(x-1)^4} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x}.$$

En posant dans la formule (6) $i = 1$, $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, il vient

$$A_1 = \Sigma (-1)^3 \frac{[\delta' C \delta'] \, [\delta'' C \delta'']}{(-1)^{1+\delta'} \, 1^{1+\delta''}} = \Sigma \frac{1}{(-1)^{\delta'}},$$

étant $\delta' + \delta'' = 3$, et par conséquent $\delta' = 3, 2, 1, 0$; ce qui donne $A_1 = 0$.

De la même manière on obtient, en posant $i = 2$,

$$A_2 = -\Sigma \frac{1}{(-1)^{\delta'}}, \quad \delta' + \delta'' = 2,$$

ce qui donne $\delta' = 2, 1, 0$ et par conséquent $A_2 = -1$.

En continuant de la même manière, c'est à dire en faisant $i = 3$ et $\delta' + \delta'' = 1$, et après $i = 4$, $\delta' + \delta'' = 0$, il vient $A_3 = 0$, $A_4 = -1$.

La même formule (6) donne

$$B = \Sigma \frac{[(3+\delta') C \delta']}{1^{\delta'+4} \, 2^{\delta''+1}}, \quad \delta' + \delta'' = 0,$$

d'où l'on déduit $B = \frac{1}{2}$.

On obtient aussi

$$C = \Sigma \frac{[(3+\delta') C \delta']}{(-1)^{\delta'+4} (-2)^{\delta''+1}}, \quad \delta' + \delta'' = 0,$$

ce qui donne $C = -\frac{1}{2}$.

Le résultat de la décomposition de la fraction proposée en des fractions simples est donc le suivant:

$$\frac{1}{x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 2x} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^4} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x}.$$

4. Nous allons passer maintenant à la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions simples.

Nous avons

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{M_1}{x - a_1} + \frac{M_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

où

$$\varphi(x) = (x - a_2)^{\beta} (x - a_3)^{\gamma} \ldots (x - a_n)^{\lambda},$$

et nous allons déterminer les constantes $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{\alpha}$.

En faisant $x = a_1 + h$, il vient

$$\frac{F_1(a_1 + h)}{F(a_1 + h)} = \frac{M_1}{h} + \frac{M_2}{h^2} + \ldots + \frac{M_{\alpha}}{h^{\alpha}} + \frac{\varphi_1(a_1 + h)}{\varphi(a_1 + h)}.$$

Le quotient de la division de $\varphi_1(a_1 + h)$ par $\varphi(a_1 + h)$ ne peut contenir que des puissances entières de h, parceque $\varphi(a_1)$ n'étant pas nulle, $\frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi(x)}$ ne peut pas être égale à l'infini: et par conséquent $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{\alpha}$ sont les coefficients de $\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^3}, \ldots$ dans le développement de $\frac{F_1(a_1 + h)}{F(a_1 + h)}$ suivant les puissances de h.

Cela posé, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{F_1(x)}{F(x)} &= \frac{A_1 F_1(x)}{x - a_1} + \frac{A_2 F_1(x)}{(x - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha} F_1(x)}{(x - a_1)^{\alpha}} \\ &+ \frac{B_1 F_1(x)}{x - a_2} + \frac{B_2 F_1(x)}{(x - a_2)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta} F_1(x)}{(x - a_2)^{\beta}} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L_1 F_1(x)}{(x - a_n)} + \frac{L_2 F_1(x)}{(x - a_n)^2} + \ldots + \frac{L_{\lambda} F_1(x)}{(x - a_n)^{\lambda}},\end{aligned}$$

$A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, L_1, L_2, \ldots$, étant des constantes que nous avons déjà déterminées précédemment.

En faisant $x = a_1 + h$ dans le premier terme de cette somme, il vient

$$\begin{aligned}A_1 \frac{F_1(a_1 + h)}{h} &= A_1 \frac{F_1(a_1) + hF'(a_1) + \frac{1}{2} h^2 F''(a_1) + \ldots}{h} \\ &= A_1 h^{-1} F_1(a_1) + A_1 F'(a_1) + \frac{1}{2} A_1 h F_1''(a_1) + \ldots\end{aligned}$$

De la même manière le second terme de la somme donne

$$\frac{A_2 F_1(a_1 + h)}{h^2} = A_2 h^{-2} F_1(a_1) + A_2 h^{-1} F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_2 F_1''(a_1) + \ldots,$$

et le troisième donne

$$A_3 \frac{F_1(a_1+h)}{h^3} = A_3 h^{-3} F_1(a_1) + A_3 h^{-2} F'_1(a_1) + \frac{1}{2} A_3 h^{-1} F''_1(a_1) + \frac{1}{2.3} A_3 F'''_1(a_1) + \ldots,$$

et on peut continuer ainsi pour tous les termes de la première ligne.

En faisant $x = a_1 + h$ dans les autres lignes, il ne viennent des puissances negatives de h, et pour cela il ne faut pas y avoir égard.

Les coefficients de $\frac{1}{h}$ seront donc

$$A_1 F_1(a_1),\ A_2 F'_1(a_1),\ \ldots,\ \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1),$$

et par conséquent

$$M_1 = A_1 F_1(a_1) + A_2 F'_1(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1).$$

Additionant séparément les coefficients des sécondes, troisièmes, etc. puissances de $\frac{1}{h}$, on obtient les valeurs de M_2, M_3, M_4, ..., et nous avons ainsi les formules suivantes:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} M_1 &= A_1 F_1(a_1) + A_2 F'_1(a_1) + \frac{1}{2} A_3 F''_1(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1),\\ M_2 &= A_2 F_1(a_1) + A_3 F'_1(a_1) + \frac{1}{2} A_4 F''_1(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-2)} F_1^{(\alpha-2)}(a_1),\\ M_3 &= A_3 F_1(a_1) + A_4 F'_1(a_1) + \frac{1}{2} A_5 F''_1(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-3)} F_1^{(\alpha-3)}(a_1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ M_\alpha &= A_\alpha F_1(a_1), \end{aligned}\right.$$

qui sont les formules que nous cherchions.

Pour trouver les numérateurs N_1, N_2, N_3, ... des autres fractions simples dans lesquelles on peut décomposer $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, dont les dénominateurs sont $x - a_2$, $(x-a_2)^2$, etc., il suffit de changer dans les formules précédentes a_1 en a_2 et A_1, A_2, A_3, ..., A_α en B_1, B_2, B_3, ..., B_β.

Il faut faire des changements analogues pour trouver les autres fractions simples.

On aurait pu aussi déduire les formules précédentes des formules connues:

$$F_1(a_1) = M_\alpha \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2.1},$$

$$F_1'(a_1) = M_\alpha \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)\alpha\ldots 3.2} + M_{\alpha-1} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 3.2},$$

$$F_1''(a_1) = M_\alpha \frac{F^{(\alpha+2)}}{(\alpha+2)(\alpha-1)\ldots 4.3} + M_{\alpha-1} \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\alpha\ldots 4.3} + M_{\alpha-1} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 4.3},$$

. . . .

Soit, par exemple, à décomposer la fraction

$$\frac{x^2-3x+5}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x} = \frac{M_4}{(x-1)^4} + \frac{M_3}{(x-1)^3} + \frac{M_2}{(x-1)^2} + \frac{M_1}{x-1} + \frac{N}{x-2} + \frac{P}{x}.$$

Les formules (7) donnent

$$M_1 = 3A_1 - A_2 + A_3,$$
$$M_2 = 3A_2 - A_3 + A_4,$$
$$M_3 = 3A_3 - A_4,$$
$$M_4 = 3A_4,$$

mais nous avons déjà vu que

$$A_1 = 0,\ A_2 = -1,\ A_3 = 0,\ A_4 = -1,$$

il s'en suit donc que

$$M_1 = 1,\ M_2 = -4,\ M_3 = 1,\ M_4 = -3.$$

De la même manière on trouve

$$N = 3B_1,\ P = 5C_1,$$

mais nous avons déjà vu que $B_1 = \frac{1}{2}$ et $C_1 = -\frac{1}{2}$, donc

$$N = \frac{3}{2},\ P = -\frac{5}{2},$$

et par conséquent

$$\frac{x^2-3x+5}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}=\frac{1}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}-\frac{\frac{5}{2}}{x}.$$

5. Comme application de la décomposition des fractions rationnelles nous allons déduire quelques formules, dont nous aurons à user plus tard.

On sait que toute fraction rationnelle propre peut être développée en une serie ordonnée suivant les puissances entières croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{\omega_1}{x}+\frac{\omega_2}{x^2}+\frac{\omega_3}{x^3}+\frac{\omega_4}{x^4}+\ldots,$$

et nous allons déterminer ω_1, ω_2, ω_3, etc.

En développant en serie les fractions simples, dans lesquelles on peut décomposer $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, il vient

$$\frac{M_1}{x-a_1}=M_1\left[\frac{1}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_1^2}{x^3}+\ldots\right],$$

$$\frac{N_1}{x-a_2}=N_1\left[\frac{1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_2^2}{x^3}+\ldots\right],$$

$$\frac{P_1}{x-a_3}=P_1\left[\frac{1}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\frac{a_3^2}{x^3}+\ldots\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

donc

$$\Sigma\frac{M_1}{x-a_1}=\frac{\Sigma M_1}{x}+\frac{\Sigma M_1a_1}{x^2}+\frac{\Sigma M_1a_1^2}{x^3}+\ldots,$$

en étendant le Σ à toutes les racines de $F(x)=0$.

De la même manière on obtient

$$\frac{M_2}{(x-a_1)^2}=M_2\left[\frac{1}{x^2}+2\frac{a_1}{x^3}+3\frac{a_1^2}{x^4}+\ldots\right],$$

$$\frac{M_3}{(x-a_1)^3}=M_3\left[\frac{1}{x^3}+3\frac{a_1}{x^4}+6\frac{a_1^2}{x^5}+\ldots\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par conséquent

$$\Sigma \frac{M_2}{(x-a_1)^2} = \frac{\Sigma M_2}{x^2} + 2\frac{\Sigma M_2 a_1}{x^3} + 3\frac{\Sigma M_2 a_1^2}{x^4} + \dots,$$

$$\Sigma \frac{M_3}{(x-a_1)^3} = \frac{\Sigma M_3}{x^3} + 3\frac{\Sigma M_3 a_1}{x^4} + 6\frac{\Sigma M_3 a_1^2}{x^5} + \dots,$$

. . . .

En égalant maintenant le développement de $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ à la somme des développements des fractions simples dans lesquelles $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ peut être décomposée, il vient:

$$\frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x^2} + \frac{\omega_3}{x^3} + \dots = \frac{\Sigma M_1}{x} + \frac{\Sigma M_1 a_1 + \Sigma M_2}{x^2} + \frac{\Sigma M_1 a_1^2 + 2\Sigma M_2 a_1 + \Sigma M_3}{x^3}$$
$$+ \frac{\Sigma M_1 a_1^3 + 3\Sigma M_2 a_1^2 + 3\Sigma M_3 a_1 + \Sigma M_4}{x^4} + \dots$$

En égalant donc les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les formules:

$$\omega_1 = \Sigma M_1$$
$$\omega_2 = \Sigma M_1 a_1 + \Sigma M_2$$
$$\omega_3 = \Sigma M_1 a_1^2 + 2\Sigma M_2 a_1 + \Sigma M_3$$
$$\omega_4 = \Sigma M_1 a_1^3 + 3\Sigma M_2 a_1^2 + 3\Sigma M_3 a_1 + \Sigma M_4$$

. . . .

n général, on obtient la formule suivante:

$$\omega_{n+1} = \Sigma M_1 a_1^n + [n\,C\,1]\,\Sigma M_2 a_1^{n-1} + [n\,C\,2]\,\Sigma M_3 a_1^{n-2} + \dots + [n\,C\,p]\,\Sigma M_{p+1} a_1^{n-p} + \dots + \Sigma M_{n+1},$$

comme il est facile de voir en ayant égard aux termes généraux des développements des fractions simples, qui donnent pour les coefficients de $\frac{1}{x^{n+1}}$ les valeurs:

$$\Sigma M_1 a_1^n,\quad \Sigma M_2 \frac{2(2+1)\dots n}{1.2\dots(n-1)} a_1^{n-1},\quad \Sigma M_3 \frac{3(3+1)\dots n}{1.2\dots(n-2)} a_1^{n-2},\quad \Sigma M_4 \frac{4(4+1)\dots n}{1.2\dots(n-3)} a_1^{n-3},$$

. . . .

ou

$$\Sigma M_1 a_1^n,\quad n\Sigma M_2 a_1^{n-1},\quad \frac{n(n-1)}{1.2}\Sigma M_3 a_1^{n-2},\quad \text{etc.}$$

6. Comme on sait, un des principaux usages de la décomposition des fractions rationnelles se rencontre dans le *Calcul intégral,* lorsqu'il s'agit d'intégrer ces fractions.

Ainsi pour intégrer $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ on décompose la fraction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions de la forme $\frac{A}{(x-a)^{\pi}}$, et après cela on intègre ces fractions au moyen des règles connues.

En faisant donc usage des formules que nous avons données précédement pour la décomposition des fractions rationnelles, nous avions à employer les formules (6) et (7). Il est cependant plus simple de décomposer seulement la fraction $\frac{1}{F(x)}$ au moyen des formules (6).

En effet

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \sum \int \frac{G_i F_1(x)}{(x-a_i)^k}dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \sum G_i \left[-\frac{F_1(x)}{(k-1)(x-a_i)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int \frac{F_1'(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-1}} \right].$$

De la même manière nous avons

$$\int \frac{F_1'(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-1}} = -\frac{F_1'(x)}{(k-2)(x-a_i)^{k-2}} + \frac{1}{k-2}\int \frac{F_1''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-2}}$$

$$\int \frac{F_1''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-2}} = -\frac{F_1''(x)}{(k-3)(x-a_i)^{k-3}} + \frac{1}{k-3}\int \frac{F_1'''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-3}}$$

. . . .

et par conséquent

$$\int \frac{F_1(x)\,dx}{F(x)} = \sum G_i \left[-\frac{F_1(x)}{(k-1)(x-a_i)^{k-1}} \right.$$

$$- \frac{1}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{F_1'(x)}{(x-a_i)^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)} \cdot \frac{F_1''(x)}{(x-a_i)^{k-3}}$$

. . . .

$$\left. - \frac{1}{(k-1)(k-2)\ldots(k-n)} \cdot \frac{F_1^{n-1}(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-n}} + \frac{1}{(k-1)(k-2)\ldots(k-n)} \cdot \int \frac{F_1^{n}(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-n}} \right].$$

Considérons cette dernière intégrale.

Comme $F_1(x)$ est une fonction rationnelle et entière, une de ses dérivées doit être une quantité constante.

1.° Si $F_1^{(n)}(x)$ est cette dérivée constante, et $k-n>1$, il vient

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-n}} = -\frac{F_1^{(n)}(x)}{(k-n-1)(x-a_i)^{k-n-1}},$$

et l'intégrale de la fraction $\frac{F_1(x)}{(x-a_i)^k}dx$ est algebrique.

2.° Si $F_1^{(n)}(x)$ est constante, et $k-n=1$, il vient

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{x-a_i} = F_1^{(n)}(x).l\,(x-a_i),$$

et l'intégrale de $\frac{F_1(x)}{(x-a_i)^k}dx$ est transcendante.

3.° Si $k-n$ est égal à l'unité, avant de $F_1^{(n)}(x)$ être constante, on obtiendra

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{x-a_i} = \int \frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+K}{x-a_i}$$

ou

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{x-a} = \int ax^{m-1}\,dx + \int bx^{m-2}\,dx + \int cx^{m-3}\,dx + \ldots + \int h\,dx + \int \frac{R}{x-a}$$

$$= \frac{ax^m}{m} + \frac{bx^{m-1}}{m-1} + \ldots + kx + R\,l\,(x-a_i),$$

où a, b, c, etc., sont les coefficients des puissances de x dans le quotient de la division de $F_1^{(n)}(x)$ par $x-a_i$, et R est le reste de cette division.

L'intégrale de $\frac{F_1(x)}{(x-a_i)^k}dx$ est donc algebrique si R est nul, c'est à dire si a_i ast une racine de $F_1^{(n)}(x)=0$.

7. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions simples, dont nous avons parlé au n.° 4, peut être encore obtenue d'une autre manière, que nous allons exposer.

La fraction proposée est

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}.$$

Divisant le numérateur de cette fraction par $x - b_1$, appelant $\varphi(x)$ le quotient, et remarquant que le reste est $F_1(b_1)$, en vertu d'un théorème d'Algèbre bien connu, nous avons

$$\frac{F_1(x)}{x - b_1} = \varphi(x) + \frac{F_1(b_1)}{x - b_1}.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par $x - b_2$, et appelant $\varphi_1(x)$ le quotient de la division de $\varphi(x)$ par $x - b_2$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x - b_1)(x - b_2)} = \varphi_1(x) + \frac{\varphi(b_2)}{x - b_2} + \frac{F_1(b_1)}{(x - b_1)(x - b_2)}.$$

En continuant de même on obtient les égalités suivantes:

$$\frac{F_1(x)}{(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)} = \varphi_2(x) + \frac{\varphi_1(b_3)}{x - b_3} + \frac{\varphi(b_2)}{(x - b_2)(x - b_3)} + \frac{F_1(b_1)}{(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)},$$

$$\frac{F_1(x)}{(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)} = \varphi_3(x) + \frac{\varphi_2(b_4)}{x - b_4} + \frac{\varphi_1(b_3)}{(x - b_3)(x - b_4)} + \frac{\varphi(b_2)}{(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)}$$
$$+ \frac{F_1(b_1)}{(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)},$$

. . . .

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{F_1(x)}{F(x)} = \varphi_{n-1}(x) + \dfrac{\varphi_{n-2}(b_n)}{x - b_n} + \dfrac{\varphi_{n-3}(b_{n-1})}{(x - b_{n-1})(x - b_n)} + \dots \\ \qquad + \dfrac{\varphi(b_2)}{(x - b_2)(x - b_3) \dots (x - b_n)} + \dfrac{F_1(b_1)}{(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)}. \end{cases}$$

Cette dernière formule résout la question proposée, parceque les numérateurs des fractions qu'y entrent sont constants, et nous avons déjà donné au n.° 2 des formules pour décomposer les fractions rationnelles, dont les numérateurs sont constants. Nous devons encore remarquer que les formules précédentes sont applicables dans le cas de $F(x)$ contenir des facteurs égaux; il suffit alors d'y rendre égales celles des quantités b_1, b_2, b_3, ... qui correspondent aux facteurs égaux.

Quand le degré de $F_1(x)$ est inférieur de i unités à celui de $F(x)$ quelques unes des quantités $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(b_n)$, $\varphi_{n-3}(b_{n-1})$, ... sont nulles.

Nous ferons encore remarquer que, dans le cas de $F(x) = 0$ donner, par exemple, α racines égales à a_1, faisant $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = a_1$, et continuant à appeller a_2, a_3 ... les autres

racines, dont les degrés de multiplicité sont β, γ, δ ..., nous aurons en (8) des parcelles de la forme suivante à décomposer:

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-1}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-2}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-3}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En décomposant la première au moyen des formules (6) du n.º 2, on obtient A_1, A_2, A_3, etc., qui sont les numérateurs des fractions dont les dénominateurs sont $x-a_1$, $(x-a_1)^2$, $(x-a_1)^3$, etc.

Après, pour décomposer les autres fractions, il n'est pas nécessaire un nouveau calcul, parceque les numérateurs de $x-a_1$, $(x-a_1)^2$, $(x-a_1)^3$, etc., sont: A_2, A_3, A_4 ... dans la deuxième fraction; ils sont A_3, A_4, ... dans la troisième, et ainsi de suite.

Nous allons appliquer cette doctrine à l'exemple déjà considéré au n.º 4:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

Nous avons

$$\frac{x^2-3x+5}{x-1}=x-2+\frac{3}{x-1},$$

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2},$$

$$(a)\qquad \frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)x}-\frac{1}{(x-1)^3(x-2)x}+\frac{3}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

La dernière fraction fut déjà décomposée au n.º 3, et nous avons trouvé

$$\frac{1}{(x-1)^4(x-2)x}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}-\frac{\frac{1}{2}}{x}$$

donc, par le remarque précédent,

$$\frac{1}{(x-1)^3(x-2)x} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x},$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)x} = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} - \frac{\frac{1}{2}}{x}.$$

Substituant ces fractions en (a) et faisant les additions nous obtenons:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{(x-1)^4} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2} - \frac{\frac{5}{2}}{x},$$

comme au n.º 4.

8. Nous allons maintenant traduire par des formules générales ce que nous venons de dire au n.º précédent.

Comme $\varphi_{i-1}(x)$ est le quotient de la division du numérateur par le dénominateur de la fraction

$$\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_i)},$$

on a, en représentant par $R(x)$ le reste de la même division,

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varphi_{i-1}(x) &= B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + B_2 x^{m-i-2} + \dots + B_{m-i-1} x + B_{m-i}, \\ R(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{i-1} x^{i-1}, \end{aligned}$$

et nous allons déterminer B_0, B_1, B_2, etc.

On a

$$\begin{aligned} & A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-i} x^i + \dots + A_{m-1} x + A_m \\ & = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\dots(x-b_i) \\ & \times (B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + \dots + B_{m-i-1} x + B_{m-i}) \\ & + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{i-1} x^{i-1} \\ & = (x^i - S_1 x^{i-1} + S_2 x^{i-2} - S_3 x^{i-3} + \dots \pm S_i) \\ & \times (B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + \dots + B_{m-i-1} x + B_{m-i}) \\ & + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{i-1} x^{i-1}, \end{aligned}$$

où $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_i$ représentent la somme de toutes les combinaisons des quantités $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i$ prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc.

Mais les coefficients des mêmes puissances de x aux deux membres de cette égalité doivent être égaux; et on a, par conséquent, en considérant seulement ceux de $x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^{i-1}, x^i$, qui ne dependent pas des coefficients de $R(x)$,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= B_0,\\
A_1 &= -B_0 S_1 + B_1,\\
A_2 &= B_0 S_2 - B_1 S_1 + B_2,\\
A_3 &= -B_0 S_3 + B_1 S_2 - B_2 S_1 + B_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_i &= (-1)^i (B_0 S_i - B_1 S_{i-1} + B_2 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_i),\\
A_{i+1} &= (-1)^i (B_1 S_i - B_2 S_{i-1} + B_3 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_{i+1}),\\
A_{i+2} &= (-1)^i (B_2 S_i - B_3 S_{i-1} + B_4 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_{i+2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m-i} &= (-1)^i (B_{m-2i} S_i - B_{m-2i+1} S_{i-1} + \ldots + (-1)^i B_{m-i}),
\end{aligned}
$$

lorsque $m \geqq 2i$; ou

$$
\begin{aligned}
A_0 &= B_0,\\
A_1 &= -B_0 S_1 + B_1,\\
A_2 &= B_0 S_2 - B_1 S_1 + B_2,\\
A_3 &= -B_0 S_3 - B_1 S_2 - B_2 S_1 + B_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m-i} &= (-1)^{m-i} (B_0 S_{m-i} - B_1 S_{m-i-1} + \ldots + (-1)^{m-i} B_{m-i}),
\end{aligned}
$$

lorque $m < 2i$.

La première des équations de chaqu'un de ces groupes donne B_0, la seconde donne B_1, la troisième donne B_2, et ainsi de suite.

On peut obtenir immédiatement les valeurs des quantités $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_i$ au moyen des formules:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= A_0\\
B_1 &= A_1 + A_0 S'_1\\
B_2 &= A_2 + A_1 S'_1 + A_0 S'_2\\
B_3 &= A_3 + A_2 S'_1 + A_1 S'_2 + A_0 S'_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
B_i &= A_i + A_{i-1} S'_1 + A_{i-2} S'_2 + \ldots + A_0 S'_i,
\end{aligned}
$$

où S'_1, S'_2, S'_3, ... représentent les sommes des combinaisons des quantités b_1, b_2, b_3, ..., b prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc., pouvant la même quantité entrer plus qu'une fois en chaque combinaison, c'est-à-dire:

$$S'_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = S_1$$
$$S'_2 = b_1^2 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + \ldots + b_2^2 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + \ldots$$
$$S'_3 = b_1^3 + b_1 b_2^2 + b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les formules précédentes sont applicables au cas de $F(x)$ contenir des facteurs égaux. Il faut alors y rendre égales quelques-une des quantités b_1, b_2, b_3, etc.

Cela posé, pour obtenir $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(b_n)$, $\varphi_{n-3}(b_{n-1})$, ..., $\varphi_1(b_3)$, $\varphi(b_2)$, nous ferons dans la formule (9) $i = n$, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1 et nous y changerons x en b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_3, b_2.

Nous allons appliquer maintenant cette doctrine à l'exemple déjà considéré:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^4 (x-2) x}.$$

La formule (8), en faisant

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1,\ b_5 = 2,\ b_6 = 0,\ n = 6,$$

donne

$$\frac{F_1 x}{F x} = \varphi_5(x) + \frac{\varphi_4(0)}{x} + \frac{\varphi_3(2)}{x(x-2)} + \frac{\varphi_2(1)}{x(x-2)(x-1)} + \frac{\varphi_1(1)}{x(x-2)(x-1)^2}$$
$$+ \frac{\varphi(1)}{x(x-2)(x-1)^3} + \frac{F_1(x)}{x(x-2)(x-1)^4},$$

et la formule (9), en y faisant $m = 2$ et $i = 6, 5, 4, 3, 2, 1$,

$$\varphi_5(x) = 0,\ \varphi_4(0) = 0,\ \varphi_3(2) = 0,\ \varphi_2(1) = 0,$$
$$\varphi_1(1) = B_0 = A_0 = 1,$$
$$\varphi(1) = B_0 + B_1 = A_0 + A_1 + B_0 S_1 = -1,\ F_1(1) = 3,$$

par conséquent nous obtenons le même résultat qu'au n.° 7.

9. Les formules (6) donnent l'expression algebrique des numérateurs des fractions simples en lesquelles on peut décomposer une fraction rationnelle, en fonction immédiate des

*

quantités données. On peut aussi trouver l'expression algebrique de ces numérateurs en fonction des dérivées d'une certaine fonction, comme a fait Mr. Serret dans son *Cours d'Algèbre supérieure.* Nous allons exposer ces formules.

Nous avons

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{M_1}{x-a_1} + \frac{M_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

où

$$\varphi(x) = (x-a_2)^\beta (x-a_3)^\gamma \ldots (x-a_n)^\lambda.$$

En posant $x = a_1 + h$, il vient

$$\frac{F_1(a_1+h)}{F(a_1+h)} = \frac{M_1}{h} + \frac{M_2}{h^2} + \ldots + \frac{M_\alpha}{h^\alpha} + \frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}$$

et, multipliant par h^α,

$$\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)} = M_\alpha + M_{\alpha-1}h + M_{\alpha-2}h^2 + \ldots + M_1 h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}.$$

Nous avons déjà dit que $\frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}$ ne contient pas des puissances négatives de h, donc la formule précédente représente le développement de $\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}$ en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de h. Par conséquent cette formule doit être identique à celle de Maclaurin, qui est

$$\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)} = \psi(a_1+h) = \psi(a_1) + h\psi'(a_1) + \frac{h^2}{1.2}\psi''(a_1) + \ldots + \frac{h^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\psi^{(\alpha-1)}(a_1) + \ldots$$

étant

$$\frac{F_1(x)}{\varphi(x)} = \psi(x).$$

Cette identité donne

$$(10)\quad \begin{cases} M_\alpha = \psi(a_1),\ M_{\alpha-1} = \psi'(a_1),\ M_{\alpha-2} = \dfrac{\psi''(a_1)}{1.2},\ M_{\alpha-3} = \dfrac{\psi'''(a_1)}{1.2.3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ M_2 = \dfrac{\psi^{(\alpha-2)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-2)},\ M_1 = \dfrac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-1)}. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\psi(a_1)}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\psi'(a_1)}{(x-a_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-a_1)} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

On trouve de la même manière les numérateurs des autres fractions dans lesquelles on décompose la fraction donnée. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{F_1(x)}{F(x)} = {} & \frac{\psi(a_1)}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\psi'(a_1)}{(x-a_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-a_1)} \\ & + \frac{\theta(a_2)}{(x-a_2)^\beta} + \frac{\theta'(a_2)}{(x-a_2)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{\theta^{(\beta-1)}(a_2)}{1.2\ldots(\beta-1)(x-a_2)} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{\varpi(a_n)}{(x-a_n)^\lambda} + \frac{\varpi'(a_n)}{(x-a_n)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{\varpi^{(\lambda-1)}(a_n)}{1.2\ldots(\lambda-1)(x-a_n)}, \end{aligned}$$

étant

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (x-a_1)^\alpha \frac{F_1(x)}{F(x)}, \\ \theta(x) &= (x-a_2)^\beta \frac{F_1(x)}{F(x)}, \\ & \dots\dots\dots\dots \\ \varpi(x) &= (x-a_n)^\lambda \frac{F_1(x)}{F(x)}. \end{aligned}$$

10. En comparant les formules (10) aux formules (6), remarquant que, lorsque $F_1(x) = 1$, les M_i coincident avec les A_i, nous obtenons une expression algebrique de la dérivée d'ordre n de la fraction $\dfrac{1}{F(x)}$.

En effet, cette comparaison donne

$$\frac{\psi^{(\alpha-i)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-i)}=(-1)^{\alpha-i}\Sigma\frac{[(\beta+\delta'-1)C\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}}\times\frac{[(\gamma+\delta''-1)C\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}}\times\ldots\times\frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)C\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}},$$

étant

$$\delta'+\delta''+\ldots+\delta^{(n-1)}=\alpha-i,$$

ou, faisant $\alpha-i=m$, et substituant a_1 par x,

$$\frac{d^m\dfrac{1}{(x-a_2)^\beta(x-a_3)^\gamma\ldots(x-a_n)^\lambda}}{1.2\ldots m dx^m}$$

$$=(-1)^m\Sigma\frac{[(\beta+\delta'-1)C\delta']}{(x-a_2)^{\beta+\delta'}}\times\frac{[(\gamma+\delta''-1)C\delta'']}{(x-a_3)^{\gamma+\delta''}}\times\ldots\times\frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)C\delta^{(n-1)}]}{(x-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}},$$

étant

$$\delta'+\delta''+\ldots+\delta^{(n-1)}=m.$$

11. Nous avons dans les numéros précédents trouvé l'expression algebrique des numérateurs des fractions simples dans lesquelles on peut décomposer une fraction rationnelle. Quand on veut décomposer une fraction particulière $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, l'application des formules précédentes donne beaucoup de peine, et par conséquent il est préférable employer des autres méthodes, qui sont bien connues. Nous en allons exposer les plus simples, quand les racines de $F(x)=0$ sont réelles, et quand sont imaginaires.

Soit proposée la fraction

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta\ldots(x-a_n)^\lambda}.$$

Nous avons premièrement

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}=\theta(x)+\frac{A_\alpha}{x-a_1}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

étant

$$\varphi(x) = (x-a_2)^{\beta}(x-a_3)^{\gamma}\ldots(x-a_n)^{\lambda},$$

où A_α et $\varphi_1(x)$ sont donnés par les formules

$$A_\alpha = \frac{F_1(a_1)}{\varphi(a_1)},\quad \varphi_1(x) = \frac{F_1(x) - A_\alpha\varphi(x)}{x-a_1} - \theta(x)\varphi(x),$$

dont la première vient de (6) et (7), et dont la deuxième vient de la formule précédente.

En divisant par $x-a_1$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^2\varphi(x)} = \theta_1(x) + \frac{\theta(a_1)}{x-a_1} + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^2} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}.$$

En décomposant de la même manière la dernière fraction, on obtient

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1)\varphi(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)},$$

où A e $\varphi_2(x)$ sont trouvés comme précédemment.

Donc

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^2\varphi(x)} = \theta_1(x) + \frac{\theta(a_1)+A}{x-a_1} + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^2} + \frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)}$$
$$= \theta_1(x) + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a_1} + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^2} + \frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)}.$$

En divisant par $x-a_2$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^3\varphi(x)} = \theta_2(x) + \frac{\theta_1(a_1)}{x-a_1} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^3} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}.$$

La dernière fraction donne

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-a_1)\varphi(x)} = \frac{A'}{x-a_1} + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)},$$

donc

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^3\varphi(x)} = \theta_2(x) + \frac{\theta_1(a_1)+A'}{x-a_1} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^3} + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)}$$

$$= \theta_2(x) + \frac{A_{\alpha-2}}{x-a_1} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^3} + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)}.$$

En continuant de la même manière on obtient la formule

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^\alpha\varphi(x)} = \frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)}.$$

Ainsi la décomposition de la fraction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ reste dépendante de la décomposition de la fraction $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)}$, qui ne contient pas dans le dénominateur $(x-a_1)^\alpha$. Cette fraction donne de la même manière

$$\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)} = \frac{B_1}{(x-a_2)} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta} + \frac{\psi_\beta(x)}{\psi(x)},$$

où $\psi(x)$ ne contient pas $(x-a_2)^\beta$.

En continuant de la même manière on décompose complétement la fraction proposée.

Nous allons appliquer cette doctrine à l'exemple déjà considéré

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)x}.$$

Nous avons

$$F_1(x) = x^2-3x+5,\quad \varphi(x) = (x-2)x,$$

donc

$$A_\alpha = -3,\quad \varphi_1(x) = 4x-5$$

et, par conséquent,

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)x} = -\frac{3}{x-1} + \frac{4x-5}{(x-2)x}.$$

Ensuite

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^2(x-2)x}=-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4x-5}{(x-1)(x-2)x}=-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{5-x}{x(x-2)}.$$

Continuant de la même manière, on obtient

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^3(x-2)x}=-\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{5-x}{(x-1)x(x-2)}$$

$$=-\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-1}+\frac{4x-5}{x(x-2)}$$

et ensuite

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}=-\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{5-x}{x(x-2)}$$

$$=-\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{\frac{5}{2}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}.$$

On voit par le n.º 4 qu'on peut aussi faire la décomposition de $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ divisant $F_1(a+h)$ par $\frac{F(a+h)}{h^7}$.

12. Nous allons considérer maintenant le cas de le denominateur de la fraction proposée contenir des facteurs imaginaires du premier degré. La méthode de décomposition précédente est encore applicable, mais on sait qu'on peut éviter les imaginaires décomposant la fraction proposée de la manière suivante:

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^{\alpha}}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha}x+B_{\alpha}}{x^2+px+q}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

étant x^2+px+q le produit de deux facteurs imaginaires conjugués $x-g-h\sqrt{-1}$ et $x-g+h\sqrt{-1}$, et $\varphi(x)$ le produit de tous les autres facteurs de $F(x)$.

Pour trouver A_1, B_1, A_2, B_2, etc., on peut procéder comme dans le cas précédent, partant de $\alpha=1$. Nous avons, en effet,

$$\frac{F_1(x)}{(x-g-h\sqrt{-1})(x-g+h\sqrt{-1})\varphi(x)}=\frac{A}{x-g-h\sqrt{-1}}+\frac{B}{x-g+h\sqrt{-1}}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

étant

$$A_1 = \frac{F_1(\theta + \theta'\sqrt{-1})}{F'(\theta + \theta'\sqrt{-1})} = K + K'\sqrt{-1},$$

$$A_2 = \frac{F_1(\theta - \theta'\sqrt{-1})}{F'(\theta - \theta'\sqrt{-1})} = K - K'\sqrt{-1};$$

donc

$$\frac{F_1(x)}{(x^2 + px + q)\varphi(x)} = \frac{K + K'\sqrt{-1}}{x - \theta - \theta'\sqrt{-1}} + \frac{K - K'\sqrt{-1}}{x - \theta + \theta'\sqrt{-1}} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

$$= \frac{2K(x-\theta) - 2K'\theta'}{(x-\theta)^2 + \theta'^2} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

Procédant comme dans le cas des facteurs réels, c'est-à-dire faisant des multiplications successives par $x^2 + px + q$, on décompose la fraction proposée.

III

VARIOS ARTIGOS SOBRE DIVERSAS QUESTÕES DE ANALYSE

I

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE

(Bulletin des Sciences Mathématiques, 2.e série, t. XVII. Paris, 1893)

Permettez, Monsieur, que je vous présente une manière bien simple de former des fonctions analytiques qui admettent pour espace lacunaire un cercle. Je m'appuierai sur le théorème suivant, dont on trouve une démonstration bien simple dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. II, p. 138).

Si les fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... peuvent être représentées par les développements suivants, dans les environs du point z_0,

$$f_1(z) = a'_0 + a'_1(z-z_0) + a'_2(z-z_0)^2 + \dots,$$
$$f_2(z) = a''_0 + a''_1(z-z_0) + a''_2(z-z_0)^2 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et si la série suivante, que l'on obtient en remplaçant chaque terme des précédentes par son module et en additionant ensuite les résultats,

$$\begin{aligned} &|a'_0| + |a'_1|\,|z-z_0| + |a'_2|\,|z-z_0|^2 + \dots \\ +&|a''_0| + |a''_1|\,|z-z_0| + |a''_2|\,|z-z_0|^2 + \dots \\ +&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

est convergente dans les environs du même point, le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$$

représente une fonction holomorphe de z dans les environs du point z_0.

Cela posé, je considère le produit

$$(1)\qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} z^{n}}\right],$$

et je remarque premièrement que ce produit est convergent quand $|z|>1$, parce qu'il est alors

$$\lim_{n=\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} z^{n}}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}|z|^{n+1}}=\frac{1}{|z|}<1.$$

Soit donc $|z_0|>1$. Nous avons, dans les environs de ce point,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} z^{n}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} z_0^{n}}\left[1-n\frac{z-z_0}{z_0}+\frac{n(n+1)}{2}\frac{(z-z_0)^2}{z_0^2}-\dots\right],$$

et le théorème précédent fait voir que le produit (1) représente une fonction de z, holomorphe dans les environs de z_0, quand la série

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}|z_0|^{n}}\left[1+n\frac{|z-z_0|}{|z_0|}+\frac{n(n+2)}{2}\frac{|z-z_0|^2}{|z_0|^2}+\dots\right]$$

est convergente.

Mais cette série est équivalente à la suivante:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}|z_0|^{n}}\left(1-\frac{|z-z_0|}{|z_0|}\right)^{-n},$$

qui est convergente quand

$$|z-z_0|<|z_0|-1,$$

parce qu'alors le rapport d'un terme au précédent tend vers la limite, inférieure à l'unité,

$$\frac{1}{|z_0|\left(1-\frac{|z-z_0|}{|z_0|}\right)}.$$

Donc la série précédente est convergente dans le cercle dont le centre est le point d'affixe z_0 et dont le rayon est égal à la quantité positive $|z_0| - 1$, et le produit (1) représente une fonction holomorphe dans les environs du point z_0.

Le point z_0 est d'ailleurs un point quelconque tel que l'on ait $|z_0| > 1$. Le produit (1) représente donc une fonction holomorphe à l'extérieur du cercle de rayon égal à l'unité.

Je remarquerai maintenant que les racines de la fonction (1) sont données par l'équation

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n} = 1,$$

en attribuant à n les valeurs 2, 3, 4, ..., et que cette équation donne

$$z = \frac{e^{\frac{2k\pi i}{n}}}{1 - \frac{1}{n}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Donc les racines qui correspondent à chaque valeur de n peuvent être représentées par des points d'une circonférence de rayon égal à $\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$ et ces points divisent la circonférence en n parties égales.

Quand n tend vers l'infini, le rayon de la circonférence précédente tend vers l'unité et les points qui représentent les racines de la fonction (1) augmentent d'une telle manière que, dans le voisinage de chaque point de la circonférence de rayon égal à l'unité, il y a une infinité de points qui représentent des racines de la fonction (1). Comme les racines des fonctions holomorphes doivent être séparées par des intervalles finis, il n'existe donc une fonction holomorphe qui soit la continuation, à l'intérieur du cercle de rayon égal à l'unité, de la fonction (1).

II

SUR UNE FORMULE D'INTERPOLATION

(Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 2.e série, t. X. Liège, 1883)

Le but de cette Note est de démontrer une formule qui permette de déterminer une fonction de x, quand on connait les valeurs qu'elle prend, ainsi que ses dérivées, pour des valeurs particulières données à la variable.

Si nous désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs attribuées à x, les valeurs de la fonction et de ses dérivées seront représentées par le tableau suivant:

$$\begin{array}{l} x = a_1, \; y_1, \; y_1', \; y_1'', \; \ldots, \; y_1^{(\alpha-1)}, \\ x = a_2, \; y_2, \; y_2', \; y_2'', \; \ldots, \; y_2^{(\beta-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x = a_n, \; y_n, \; y_n', \; y_n'', \; \ldots, \; y_n^{(\lambda-1)}. \end{array}$$

A ce problème correspond, en Géométrie, la détermination d'une courbe qui passe par les points (a_1, y_1), (a_2, y_2), $\ldots$, (a_n, y_n) et qui, en ces points, ait des contacts d'ordres $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\ldots$, $\lambda - 1$ avec des courbes données.

Appelons $f(x)$ la fonction cherchée et soit

$$F(x) = (x - a_1)^\alpha (x - a_2)^\beta \ldots (x - a_n)^\lambda.$$

Posons

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1}{(x-a_1)} + \frac{M_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} \\ + \frac{N_1}{(x-a_2)} + \frac{N_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{N_\beta}{(x-a_2)^\beta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{K_1}{(x-a_n)} + \frac{K_2}{(x-a_n)^2} + \dots + \frac{K_\lambda}{(x-a_n)^\lambda},\end{aligned}$$

et déterminons les numérateurs de ces fractions.

Si nous donnons à x la valeur $a_1 + h$, dans

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1}{(x-a_1)} + \frac{M_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

où

$$\varphi(x) = (x-a_2)^\beta (x-a_3)^\gamma \dots (x-a_n)^\lambda,$$

il vient

$$\frac{f(a_1+h)}{F(a_1+h)} = \frac{M_1}{h} + \frac{M_2}{h^2} + \dots + \frac{M_\alpha}{h^\alpha} + \frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}.$$

Le quotient de $\varphi_1(a_1+h)$ par $\varphi(a_1+h)$ ne peut contenir que des puissances entières de h, parce que $\frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi(a_1)}$ ne peut devenir infini pour $h=0$; il en résulte que $M_1, M_2, \dots, M_\alpha$ sont les coefficients de $\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \dots, \frac{1}{h^\alpha}$ dans le développement de $\frac{f(a_1+h)}{F(a_1+h)}$ suivant les puissances de h.

D'autre part, en appelant $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$; $B_1, B_2, \dots, B_\beta$; $\dots$; $P_1, P_2, \dots, P_\lambda$ les numérateurs des fractions simples que l'on obtient en décomposant $\frac{1}{F(x)}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1 f(x)}{(x-a_1)} + \frac{A_2 f(x)}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x-a_1)^\alpha} \\ + \frac{B_1 f(x)}{(x-a_2)} + \frac{B_2 f(x)}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{B_\beta f(x)}{(x-a_2)^\beta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{P_1 f(x)}{(x-a_n)} + \frac{P_2 f(x)}{(x-a_n)^2} + \dots + \frac{P_\lambda f(x)}{(x-a_n)^\lambda}.\end{aligned}$$

En faisant $x = a_1 + h$ dans le premier terme de cette somme, il vient

$$A_1 \frac{f(a_1 + h)}{h} = A_1 \frac{f(a_1) + hf'(a_1) + \frac{1}{2} h^2 f''(a_1) + \ldots}{h}$$

$$= A_1 h^{-1} f(a_1) + A_1 f'(a_1) + \frac{1}{2} A_1 h f''(a_1) + \ldots$$

De même, le second terme donne

$$\frac{A_2 f(a_1 + h)}{h^2} = A_2 h^{-2} f(a_1) + A_2 h^{-1} f'(a_1) + \frac{1}{2} A_2 f''(a_1) + \ldots,$$

le troisième

$$\frac{A_3 f(a_1 + h)}{h^3} = A_3 h^{-3} f(a_1) + A_3 h^{-2} f'(a_1) + \frac{1}{2} A_3 h^{-1} f''(a_1) + \ldots$$

et ainsi de suite.

En faisant $x = a_1 + h$, dans les autres lignes, on n'obtiendra pas de puissances négatives de h, comme nous l'avons dit tantôt.

Les coefficients de $\frac{1}{h}$ sont donc

$$A_1 f(a_1),\ A_2 f'(a_1),\ \ldots,\ \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} f^{(\alpha-1)}(a_1),$$

et nous avons

$$M_1 = A_1 f(a_1) + A_2 f'(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} f^{(\alpha-1)}(a_1).$$

En sommant séparément les coefficients des puissances du degré 2, 3, 4, ... de $\frac{1}{h}$, nous trouvons de la même manière les valeurs de M_2, M_3, M_4, etc., à savoir:

$$M_2 = A_2 f(a_1) + A_3 f'(a_1) + \frac{1}{2} A_4 f''(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-2)} f^{(\alpha-2)}(a_1),$$

$$M_3 = A_3 f(a_1) + A_4 f'(a_1) + \frac{1}{2} A_5 f''(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-3)} f^{(\alpha-3)}(a_1),$$

....

$$M_\alpha = A_\alpha f(a_1).$$

Pour obtenir les numérateurs N_1, N_2, N_3, etc., il suffit de changer, dans les formules précédentes, a_1 en a_2, α en β et $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ en $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$.

On obtient les autres numérateurs des fractions simples en faisant des changements analogues.

Nous serons conduits finalement à la formule suivante:

$$f(x) = F(x)\Bigg\{\left[\frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \frac{A_3}{(x-a_1)^3} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}\right] y_1$$

$$+ \left[\frac{A_2}{(x-a_1)} + \frac{A_3}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^{\alpha-1}}\right] y'_1$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)} \cdot \frac{A_\alpha}{(x-a_1)} y_1^{(\alpha-1)}$$

$$+ \left[\frac{B_1}{(x-a_2)} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}\right] y_2$$

$$+ \left[\frac{B_2}{(x-a_2)} + \frac{B_3}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^{\beta-1}}\right] y'_2$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(\beta-1)} \cdot \frac{B_\beta}{(x-a_2)} y_2^{(\beta-1)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left[\frac{P_1}{(x-a_n)} + \frac{P_2}{(x-a_n)^2} + \frac{P_3}{(x-a_n)^3} + \ldots + \frac{P_\lambda}{(x-a_n)^\lambda}\right] y_n$$

$$+ \left[\frac{P_2}{(x-a_n)} + \frac{P_3}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{P_\lambda}{(x-a_n)^{\lambda-1}}\right] y'_n$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(\lambda-1)} \cdot \frac{P_\lambda}{(x-a_n)} y_n^{(\lambda-1)}\Bigg\}.$$

La fonction ainsi déterminée résout la question proposée. On voit que, pour l'appliquer, il est nécessaire de décomposer en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{1}{F(x)}$, ce qu'on peut faire en employant une des méthodes connues.

On peut faire usage, par exemple, des formules que nous avons fait connaître dans notre

*

travail, *Sur la décomposition des fractions rationnelles* (1), à savoir

$$\mathrm{A}_i = (-1)^{\alpha-i}\,\Sigma\,\frac{[(\beta+\delta'-1)\,\mathrm{C}\delta'][(\gamma+\delta''-1)\,\mathrm{C}\delta'']\ldots[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,\mathrm{C}\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}\,(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}\ldots(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}},$$

où l'on doit donner à δ', δ'', ..., $\delta^{(n-1)}$ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\delta'+\delta''+\ldots+\delta^{(n-1)} = \alpha - i.$$

Pour déterminer les numérateurs B_i, il suffit de changer, dans la formule précédente, α en β et a_1 en a_2.

Les autres numérateurs s'obtiennent d'une manière analogue.

Si, dans les relations précédentes, nous faisons

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \ldots, \quad \lambda = 1,$$

il vient

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}\,y_1 \\ & + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}\,y_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}\,y_n, \end{aligned}$$

ce qui est la formule d'interpolation de Lagrange.

---

(1) Voir ce volume, p. 12

III

SUR LA FORMULE DE STIRLING

Extrait d'une lettre adressée à M. Rouché

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 3.ᵉ série, t. X. Paris, 1891)

Dans une Note, *Sur la formule de Stirling,* qui a été insérée dans les *Comptes rendus,* t. cx, 1890, p. 513, vous démontrez d'une manière bien simple la formule

$$(a) \qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12(n+p)n}},$$

où θ représente un nombre compris entre 0 et 1, et où l'on a

$$(b) \qquad \varphi(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, au moyen de cette formule, vous trouvez la formule de Stirling, qui donne le produit $\Gamma(n+1)$, quand n est un nombre très grand. Vous supposez, dans votre analyse, que n est un nombre positif *entier.*

En étudiant votre démonstration, je viens de remarquer qu'on peut la modifier de manière à considérer le cas où n représente un nombre quelconque, rationnel ou irrationel. Je remarque premièrement que votre démonstration de la formule (a) a lieu quand n est fraction-

naire, et que l'égalité

$$\lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi},$$

dont vous donnez une démonstration basée sur la formule de Wallis, ne depend pas de n.

Ensuite je modifie l'analyse que vous employez pour déduire de (a) la formule de Stirling de la manière suivante.

Je trouve premièrement au moyen de la formule (b)

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = \lim_{p=\infty} \frac{\Gamma(n+p+1)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+1)e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}}$$

et, ayant égard aux égalités

$$\Gamma(n+p+1) = n(n+1)\ldots(n+p)\Gamma(n),$$
$$\Gamma(p+1) = 1.2.3\ldots p,$$

j'écris cette formule d'abord de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(n)} = \lim_{p=\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+p)\Gamma(n)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{p!\,e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

et ensuite, ayant égard à la definition de Gauss de la fonction $\Gamma(n)$,

$$\Gamma(n) = \lim_{p=\infty} \frac{p!\,p^n}{n(n+1)\ldots(n+p)},$$

je l'écris de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = \lim_{p=\infty} \frac{p^{n+p+\frac{1}{2}}}{e^{-n}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}}.$$

Mais nous avons

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{n}{p}+1\right)^{n+p+\frac{1}{2}} = e^n.$$

Donc on aura

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = 1,$$

et, par conséquent,

$$\lim_{p=\infty} \varphi(n+p) = \lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Si l'on remarque maintenant que la formule (a) donne

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

et par conséquent

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}} \lim_{p=\infty} \varphi(n+p),$$

on trouve

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}} \sqrt{2\pi},$$

et l'égalité (b) donne ensuite la formule Stirling

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Note

Pour plus de clarté, nous allons reproduire ici la démonstration de la formule de Stirling, donnée par M. Rouché, à laquelle se rapporte la lettre antérieure.

«La relation bien connue

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{\theta}{12n(n+1)}\right],$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque, et θ un nombre compris entre 0 et 1, peut s'écrire

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)[\log(n+1) - \log n].$$

Elle devient

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = \log \varphi(n) - \log \varphi(n+1),$$

quand on pose

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots n}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}. \qquad (1)$$

On conclut de là

$$\log \varphi(n) > \log \varphi(n+1),$$

et

$$\log \varphi(n) - \frac{1}{12n} < \log \varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)};$$

en d'autres termes, des deux fonctions

$$\varphi(n), \quad \varphi(n) e^{-\frac{\theta}{12n}},$$

la première est décroissante et la seconde croissante, lorsque l'entier n croît. Si donc on désigne par p un nombre entier positif quelconque, on a les inégalités

$$\varphi(n) > \varphi(n+p),$$

$$\varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+p) e^{-\frac{1}{12(n+p)}},$$

que l'on peut remplacer par l'égalité

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12n(n+p)}}, \qquad (2)$$

dans laquelle θ désigne un nombre compris entre 0 et 1.

Il est bien aisé de déduire de cette relation la formule célèbre de Stirling pour l'évaluation approchée du produit $1.2.3\ldots n$ lorque n est un grand nombre.

En effet, la relation (2), appliquée au cas où n est égal à p, montre immédiatement que le rapport

$$\frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)}$$

a pour limite l'unité, lorsque p croît indéfiniment. On a donc, pour $p = \infty$,

$$\lim \varphi(p) = \lim \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)}$$

ou, d'après (1),

$$\lim \varphi(p) = \lim \sqrt{4 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p}{2p-1}},$$

et enfin, en vertu du théorème de Wallis,

$$\lim \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Dès lors, si dans la formule (2) on laisse n fixe en faisant croître p indéfiniment, on obtient

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{12n}},$$

c'est-à-dire, d'après la définition de $\varphi(n)$,

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

C'est la formule de Stirling, qui donne deux limites

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}, \qquad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} . e^{\frac{1}{12n}},$$

entre lesquelles est compris le produit $1.2.3\ldots n$. (E. R.)

IV

SOBRE LA TEORÍA DE LOGARITMOS

(Gaceta de Matemáticas elementales, t. I. Vitoria, 1903)

1. Los lectores de la *Gaceta de Matemáticas elementales* recordarán que en el número primero de esta Revista, p. 30, el notable catedrático de la Universidad de Madrid, D. Luiz Octavio de Toledo, llamó la atención sobre el curioso é interesante tema de estudio que tiene por objeto investigar si la *unidad positiva* puede tomarse como *base* de un sistema de logaritmos. Asimismo no habrán olvidado aquellos lectores que, respondiendo al expresado llamamiento, el distinguido matemático español D. Luis Sánchez de la Campa, teniente coronel de ingenieros, ocupóse de aquella bellísima cuestión en un luminoso artículo, publicado en la sección doctrinal del n.º 7 de esta misma Revista.

Por nuestra parte, vamos ahora á estudiar el aludido tema, aunque colocándonos en un punto de vista distinto del que utilizara este último estimable matemático.

2. El poder tomar ó no la *unidad positiva* como base de un sistema logarítmico, depende de la definición que se adopte para la exponencial a^z, siendo a un número real positivo y z una cantidad compleja $x + iy$.

Supongamos, en primer término, que a representa la base e de los logaritmos neperianos. Entonces, bien sabido es que e^z puede definirse mediante la igualdad euleriana

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

donde e^x representa el valor real y positivo que en Aritmética tiene la potencia x del nú-

mero e. Sábese, además, que la función así definida satisface á las condiciones siguientes, que la caracterizan:

1.ª Es susceptible de ser representada por el desarrollo ordenado según las potencias de z:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

2.ª Satisface á la condición

$$e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta},$$

siendo α y β dos valores cualesquiera de z.

3.ª Para $y = 0$, sus correspondientes valores coinciden con los valores absolutos ó aritméticos de e^x.

La función a^z debe naturalmente ser definida de modo que, cuando á a se dé el valor e, nos encontremos con la función anterior, y, para ello, se debe tener la igualdad

$$(1) \qquad a^z = e^{z \log a},$$

en la cual $\log a$ representa el logaritmo neperiano *real* de a. La función así definida satisface á las condiciones:

1.ª Es susceptible de desarrollarse en serie ordenada según las potencias enteras y positivas de z mediante la fórmula

$$a^z = 1 + z . \log a + \frac{z^2}{2!} \log^2 a + \frac{z^3}{3!} \log^3 a + \ldots$$

2.ª Verifica la condición

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

3.ª Para $y = 0$, los correspondientes valores coinciden con los valores aritméticos de a^x.

La función *inversa* de a^z, que acaba de definirse, representa los logaritmos de todos los números, reales é imaginarios, tomados en la base a. Esta base no puede, por consiguiente, ser igual á la *unidad*, cuando se adopte para a^z la definición que acabamos de consignar, toda vez que, entonces, resultaria $a^z = 1$ para cualquiera valor de z, siempre que fuese $a = 1$.

3. Colocándonos ahora en otro punto de vista, observemos que el número a tiene un número infinito de logaritmos neperianos imaginarios, los cuales vienen dados, según es ya sabido, por la fórmula

$$\text{Log}\, a = \log a + 2ki\pi,$$

en la cual $\operatorname{Log} a$ representa uno cualquiera de los logaritmos mencionados, correspondiente à un valor determinado, arbitrariamente elegido, del entero k, siendo además definida la función a^z mediante la relación

$$(2) \qquad a^z = e^{z \operatorname{Log} a} = e^{z(\log a + 2k\pi i)} .$$

La función a^z, asi definida, participa de las propiedades siguientes:

1.ª Puede desarrollarse en serie ordenada según las potencias enteras y positivas de z, mediante la formula

$$a^z = 1 + z \operatorname{Log} a + \frac{z^2}{2!} \operatorname{Log}^2 a + \frac{z^3}{3!} \operatorname{Log}^3 a + \dots$$

2.ª Satisface á la condición

$$a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha + \beta}.$$

3.ª Los valores que toma para $y = 0$, coinciden con alguno de los sistemas de valores que, según la teoría de las potencias, adquiere a^x. En efecto; esta teoría dá, cuando x es un número racional $\frac{m}{n}$, la igualdad

$$a^x = \rho\,[\cos 2k\pi x + i \,.\, \operatorname{sen} 2k\pi x],$$

donde ρ representa el valor aritmético de a^x, y en la cual $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, igualdad que, al ser x un número irracional, sirve también para definir a^x; y la fórmula (2), dá cuando $y = 0$,

$$a^x = e^{x(\log a + 2k\pi i)} = e^{x \log a}[\cos 2k\pi x + i \,.\, \operatorname{sen} 2k\pi x] .$$

4. Invirtiendo la función que acaba de ser definida, obtiénese una nueva función, distinta de la que resulta al invertir la función exponencial definida mediante la igualdad (1), cuyos valores vamos á determinar.

Sea

$$\rho_1 (\cos \omega_1 + i \,.\, \operatorname{sen} \omega_1)$$

un número complejo dado, y determínese z de manera que resulte

$$a^z = e^{(x + yi)(\log a + 2k\pi i)} = \rho_1 (\cos \omega_1 + i \,.\, \operatorname{sen} \omega_1),$$

es decir,

$$e^{x\log a-2k\pi y}\left[\cos(2k\pi x+y\log a)+i\,.\operatorname{sen}(2k\pi x+y\log a)\right]=\rho_1(\cos\omega_1+i\,.\operatorname{sen}\omega_1),$$

de donde, por consiguiente,

$$e^{x\log a-2k\pi y}\,.\cos(2k\pi x+y\log a)=\rho_1\cos\omega_1,$$

$$e^{x\log a-2k\pi y}\,.\operatorname{sen}(2k\pi x+y\log a)=\rho_1\operatorname{sen}\omega_1.$$

Tendremos

$$\rho_1=e^{x\log a-2k\pi y},$$

$$2k\pi x+y\log a=\omega_1+2m\pi,$$

en que m representa un número entero cualquiera. De este sistema se deduce

$$x=\frac{\log a\,.\log\rho_1+2k\pi(\omega_1+2m\pi)}{\log^2 a+4k^2\pi^2},$$

$$y=\frac{\log a(\omega_1+2m\pi)-2k\pi\log\rho_1}{\log^2 a+4k^2\pi^2}.$$

En su consecuencia, tendremos

$$z=\frac{\log a\,.\log\rho_1+2k\pi(\omega_1+2m\pi)+i\left[(\omega_1+2m\pi)\log a-2k\pi\log\rho_1\right]}{\log^2 a+4k^2\pi^2}.$$

Cuando, para definir la *función exponencial,* se adopta la igualdad (2), los valores de la función inversa, esto es, de la *función logarítmica* correspondiente, vienen determinados por la fórmula que acabamos de obtener.

Haciendo en la que precede $a=1$, vendrá

$$z=\frac{\omega_1+2m\pi}{2k\pi}-i\,.\frac{\log\rho_1}{2k\pi}.$$

Por tanto, cuando la función a^z se define mediante la expresión (2), la base de los correspondientes logaritmos puede ser igual á la *unidad.*

5. Los sistemas de logaritmos que se obtienen invirtiendo la expresión (1), son distintos de los que resultan al invertir la relación (2), y, los que, en este último caso, corresponden á los diversos valores del entero k son diferentes unos de otros, participando todos ellos de

la propiedad fundamental según la que el logaritmo de un producto de factores es igual á la suma de los logaritmos de estos factores.

Los sistemas más vantajosos son los obtenidos partiendo de la igualdad (1), porque comprenden á los logaritmos aritméticos. En los sistemas que se obtienen mediante la ecuación (2), los logaritmos son reales cuando se verifica

$$(\omega + 2m\pi) \log a = 2k\pi . \log \rho_1,$$

y no todos los números positivos pueden tener, en tales sistemas, logaritmo real.

Haciendo $\omega = 0$, se vé que la condición para que un número positivo ρ_1 tenga logaritmo real, en estos mismos sistemas, es que quede satisfecha la relación

$$\rho_1 = a . e^{\frac{m}{k}},$$

siendo m un número entero arbitrario.

De cuanto precede resulta también que los logaritmos tomados en la base 1 son imaginarios, cuando el módulo del número correspondiente es distinto de la unidad.

V

SUR LA FONCTION $p(u)$

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

(Bulletin des Sciences Mathématiques, 2.e série, t. XVI. Paris, 1892)

Vous savez, Monsieur, que, pour établir la théorie des fonctions elliptiques, on peut définir premièrement la fonction $p(u)$ pour certaines valeurs particulières des périodes au moyen de l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce à invariants réels; démontrer ensuite la formule

$$(1) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right],$$

où

$$w = 2n\omega + 2m\omega', \qquad \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \Big\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

[2ω et $2\omega'$ représentant les périodes de $p(u)$] et enfin généraliser les fonctions elliptiques, en prenant ce développement pour définition de $p(u)$, dans le cas où les périodes 2ω et $2\omega'$ représentent deux quantités complexes quelconques dont le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ ne soit pas réel.

Si l'on suit cette voie pour établir la théorie des fonctions elliptiques, il faut tirer du développement (1) les propriétés de la fonction $p(u)$. On en tire immédiatement que $p(u)$ est une fonction méromorphe paire dont les pôles sont les points $2n\omega + 2m\omega'$, et que l'on a

$$\lim_{u=0} \left[p(u) - \frac{1}{u^2} \right] = 0;$$

et ensuite on voit, au moyen du théorème de Laurent, que, dans les environs du point $u=0$, on a pour $p(u)$ un développement de la forme suivante:

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+a_2 u^2+a_4 u^4+\dots$$

Vous savez que l'on démontre aussi d'une manière bien facile que la fonction définie par (1) est doublement périodique et que ses périodes sont 2ω et $2\omega'$.

Il ne reste qu'à démontrer l'égalité

$$p'^2(u)=4p^3(u)-g_2 p(u)-g_3$$

et le théorème d'addition. C'est une démonstration bien simple de chacun de ces deux théorèmes que je me propose de vous présenter.

I. Pour faire voir que la fonction $p(u)$, définie par (1), satisfait à une équation de la forme

$$p'^2(u)=4p^3(u)-g_2 p(u)-g_3,$$

je remarque premièrement que les fonctions doublement périodiques

$$p'^2(u), \qquad 4p^3(u)-g_2 p(u),$$

lesquelles ont seulement le pôle $u=0$ dans le parallélogramme des périodes, donnent, dans les environs de ce point,

$$p'^2(u)=\left[-\frac{2}{u^3}+2a_2 u+4a_4 u^3+\dots\right]^2=\frac{4}{u^6}-\frac{8a_2}{u^2}-16a_4+\dots,$$

$$4p^3(u)-g_2 p(u)=4\left[\frac{1}{u^2}+a_2 u^2+a_4 u^4+\dots\right]^3-g_2\left[\frac{1}{u^2}+a_2 u^2+a_4 u^4+\dots\right]$$

$$=\frac{4}{u^6}+\frac{12a_2-g_2}{u^2}+12a_4+\dots$$

Donc, si l'on pose

$$12a_2-g_2=-8a_2,$$

ce pôle disparaît dans la différence

$$p'^2(u) - [4p^3(u) - g_2 p(u)],$$

et cette différence est holomorphe et doublement périodique, et par conséquent constante.

Nous avons donc

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

en représentant cette différence par $-g_3$.

Pour déterminer g_3 je substitue dans cette égalité $p(u)$ et $p'(u)$ par leurs développements ordonnés suivant les puissances de u et je pose ensuite $u = 0$. Je trouve de cette manière

$$g_3 = 28 a_4.$$

Donc $p(u)$ satisfait à une équation de la forme

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

où

$$g_2 = 20 a_2, \qquad g_3 = 28 a_4.$$

II. Pour faire voir que le théorème d'addition

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right]^2 - p(u) - p(v)$$

subsiste aussi dans le cas général, je vais considérer les deux fonctions

$$F_1(u) = p(u+v)[p(u) - p(v)]^2,$$

$$F_2(u) = \frac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2,$$

qui, en supposant v constante et u variable, sont des fonctions périodiques de u, qui admettent les mêmes périodes 2ω et $2\omega'$.

La fonction $F_1(u)$ admet le pôle $u = 0$; et, en substituant $p(u)$ et $p(u+v)$ par les développements

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \dots,$$

$$p(u+v) = p(v) + u p'(v) + \frac{1}{2} u^2 p''(v) + \dots,$$

où

$$p''(v) = 6p^2(v) - \frac{1}{2}g_2 = 6p^2(v) - 10a_2,$$

$$p'''(v) = 12p(v)p'(v),$$

nous avons, dans les environs de ce pôle,

$$F_1(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \dots$$

Pour la fonction $F_2(u)$ on obtient de la même manière

$$F_2(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \dots$$

Donc le pôle $u = 0$ disparaît dans la différence

$$F_1(u) - F_2(u),$$

et nous avons donc

$$F_1(u) - F_2(u) = c.$$

Pour déterminer c, je pose $u = v$ et je trouve

$$F_1(v) = 0, \qquad F_2(v) = 0,$$

et, par conséquent, $c = 0$.

Donc nous avons

$$p(u-v)[p(u) - p(v)]^2 = \frac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2,$$

et le théorème est démontré.

VI

REMARQUES SUR UN TRAVAIL PUBLIÉ PAR N. BOUGAÏEV

Extrait d'une lettre adressée au prof. A. Vassilief

(Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan, 2.e série, t. XIII. Kasan, 1903)

Permettez que je vous présente quelques remarques sur un travail publié par N. Bougaïev dans le *Bulletin de la Société Mathématique de Moscou* (t. XXII, p. 219), qui a des rapports avec quelqu'uns de mes travaux. Je ne connais pas malheureusement la langue russe, mais il m'a été possible reconnaitre, au moyen des formules, que l'éminent géomètre y donne une démonstration de la formule de Lagrange pour le développement des racines des équations, qu'il écrit de la manière suivante:

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} \{ f'(a) [F(a, x)]^n \}}{da^{n-1}},$$

l'équation proposée étant

$$z = a + F(z, x),$$

et qu'il fait remarquer qu'on peut déduire de cette formule celle que j'ai donnée dans un article publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Paris, 3.e série, t. VII), en y posant

$$F(z, x) = x \varphi_1(z) + x^2 \varphi_2(z) + \ldots + x^k \varphi_k(z).$$

Or, j'avais déjà indiqué, dans un article publié dans le même journal (4.e série, t. V), que N. Bougaïev ne connaissait pas, parcequ'il fait seulement mention de celui-là, cette manière d'obtenir la série rapportée, et j'y avais même étudié les conditions pour sa convergence.

*

Comme dans le travail de N. Bougaïev ne se trouve pas l'analyse au moyen de laquelle on passe de la série de Lagrange pour celle que j'ai considérée dans les travaux rapportés, permettez que je vous la présente, en me plaçant toutefois dans un point de vue plus générale que dans mes articles antérieurs, parceque je vais supposer que la fonction f dépend de x.

Supposons que $f(x, z)$ et $F(x, z)$ soient deux fonctions de z, holomorphes dans une aire A, quand x représente l'affixe d'un point quelconque d'une aire B, que a soit l'affixe d'un point de l'intérieur de A et que l'origine des coordonnées soit à l'intérieur de l'aire B.

On trouve, au moyen de la démonstration classique de la formule de Lagrange, l'égalité

$$f(x, z) = f(x, a) + \sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} \{ f'_a(x, a) [F(x, a)]^n \}}{da^{n-1}} + R_\omega,$$

où

$$R_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{[F(x, z)]^{\omega-1} f(x, z) [1 - F'_z(x, z)]}{(z-a)^{\omega-2} \left[1 - \frac{F(x, z)}{z-a}\right]} dz,$$

K représentant le contour de l'aire A. Supposons maintenant que M soit la plus grande valeur que prend

$$\left| \frac{F(x, z)}{z-a} \right|$$

pour toutes les valeurs de z représentées par les points du contour de A et pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire B, et que M_1 soit la plus grande valeur de

$$\left| \frac{f(x, z)}{z-a} \right| \left| 1 - F'_z(x, z) \right|$$

pour les mêmes valeurs de z et x.

On a alors

$$|R_\omega| < \frac{\sigma}{2\pi} \frac{M^{\omega-1} M_1}{1-M},$$

où σ représente la longueur de K; et, au moyen de cette inégalité, on voit que $|R_\omega|$ tend vers zéro, quand ω tend vers l'infini, lorsqu'on a $M < 1$. Dans ce cas on peut donc écrire

$$f(x, z) = f(x, a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} \{ f'_a(x, a) [F(x, a)]^n \}}{da^{n-1}};$$

et, comme le second membre de l'inégalité antérieure ne contient pas x, on voit encore que la série qu'on vient d'obtenir est uniformement convergente dans l'aire B.

Cela posé, soit

$$F(x, z) = x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^k\varphi_k(z),$$

et supposons que ρ représente le rayon d'un cercle ayant le centre dans l'origine des coordonnées et placé à l'intérieur de l'aire B et que la fonction $f'_a(x, a)$ soit holomorphe dans l'aire de ce cercle.

En employant un théorème bien connu, donné par Weierstrass dans les *Monatsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin, pour 1880, on voit qu'on peut déduire du développement précédente de $f(x, z)$ un autre, ordonné suivant les puissances entières et positives de x, convergent dans le cercle de rayon ρ précédemment indiqué.

Pour obtenir ce développement, remarquons d'abord qu'on a

$$[F(x, a)]^n = [x\varphi_1(a) + x^2\varphi_2(a) + \ldots + x^k\varphi_k(a)]^n$$
$$= \sum \frac{n!\,[\varphi_1(a)]^\alpha [\varphi_2(a)]^\beta \ldots [\varphi_k(a)]^\lambda}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!} x^{\alpha+2\beta+\ldots+k\lambda}$$

où la somme Σ se rapporte à toutes les racines entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n;$$

et

$$f'_a(x, a) = f'_a(o, a) + u_1 x + \frac{1}{2} u_2 x^2 + \frac{1}{3!} u_3 x^3 + \ldots,$$

où u_1, u_2, u_3, ... représentent les valeurs que prennent les dérivées successives de $f'_a(x, a)$ par rapport à x, quand $x = 0$; et ensuite que le coefficient de x^m dans le produit des deux développements qu'on vient d'obtenir est égal à

$$\sum' \frac{n!\,u_i [\varphi_1(a)]^\alpha [\varphi_2(a)]^\beta \ldots [\varphi_k(a)]^\lambda}{i!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

où la somme Σ' se rapporte aux racines entières, positives et nulles, de l'équation

$$i + \alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = m.$$

On en conclut que le coefficient de x^m dans le terme général du développement précédemment écrit est égal à

$$\sum' \frac{1}{i!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{d^{n-1}\{u_i [\varphi_1(a)]^\alpha [\varphi_2(a)]^\beta \ldots [\varphi_k(a)]^\lambda\}}{da^{n-1}}.$$

Donc le développement de $f(x, z)$ en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x est donné par la formule suivante:

$$f(x, z) = f(x, a) + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \sum{}' \frac{1}{i!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{d^{n-1}\left\{ u_i [\varphi_1(a)]^{\alpha} [\varphi_2(a)]^{\beta} \ldots [\varphi_k(a)]^{\lambda} \right\}}{da^{n-1}},$$

où la somme Σ' d'étend aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$i + \alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = m,$$

et où

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Cette formule contient comme cas particulier celle que j'avais donnée dans les deux travaux précédemment rapportés. En effet, si la fonction f ne contient pas x, elle donne

$$f(z) = f(a) + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \sum{}' \frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \frac{d^{n-1}\left\{ f'(a) [\varphi_1(a)]^{\alpha} \ldots [\varphi_k(a)]^{\lambda} \right\}}{da^{n-1}},$$

où la somme Σ' se rapporte à toutes les solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = m,$$

et où

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Ces sont les remarques que je me proposais de vous communiquer. Comme elles ont des rapports avec un travail d'un de plus illustres géomètres de votre pays, je crois qu'elles pourront vous intéresser.

VII

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS SATISFAISANT A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

(Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris, 3.e série, t. II. Paris, 1885)

La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2, ... représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à x, y et y', à coefficients entiers.

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

telle que $\frac{dF}{dy'}$ soit différente de zéro, quand $x = 0$, s'il existe une valeur de n déterminée à partir de laquelle les dénominateurs de a_{n+1}, a_{n+2}, ... contiennent des facteurs premiers supérieurs respectivement à $n+1$, $n+2$, $n+3$, ...

On peut tirer ce théorème de la formule suivante, qui résulte de l'expression analytique de la dérivée d'ordre n des fonctions composées, et qui donne la dérivée d'ordre n de la fonction y (*Journal de Battaglini*, t. XVIII) [1]:

$$\sum \frac{(y')^{\alpha}(y'')^{\beta}(y''')^{\gamma}\dots(y^{(n-1)})^{\lambda}(y')^{\alpha'}(y'')^{\beta'}\dots(y^{(n-1)})^{\lambda'}(y^{(n)})^{\alpha''}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\dots\lambda'!\,(2!)^{\beta+\beta'}(3!)^{\gamma+\gamma'}\dots(n-1!)^{\lambda+\lambda'}\,\alpha''!}\,\frac{d^{m}F}{dx^{i}\,dy^{j}\,dy'^{k}} = 0. \tag{3}$$

---

[1] Voyer cet ouvrage, t. I, pag. 209.

Dans cette équation la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$(4)\qquad \alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+(n-1)\lambda+\alpha'+2\beta'+3\gamma'+\ldots+(n-1)\lambda'+\alpha''=n-1,$$

et l'on a posé

$$(5)\qquad \begin{cases} m=\alpha+\beta+\ldots+\lambda+\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda'+\alpha'', \\ b=\alpha+\beta+\ldots+\lambda, \quad c=\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda', \quad a=\alpha''. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{(2)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots n^{\lambda'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\ldots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}\left(\frac{y^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,\alpha''!}\,\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}=0,$$

ou, en séparant le terme qui contient $y^{(n)}$,

$$\sum \frac{(2)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots(n-1)^{\omega'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\ldots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,\alpha''!}\,\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}+n\,\frac{dF}{dy'}\,\frac{y^{(n)}}{n!}=0.$$

Si l'on pose maintenant $x=0$ dans cette formule, on obtient une autre formule qui donne, de proche en proche, les valeurs de y'_0, $\frac{y''_0}{2!}$, ..., $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$, qui doivent coïncider avec les coefficients a_0, a_1, a_2, ..., a_n de la série proposée.

On voit par cette formule que le dénominateur de $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ ne peut contenir que les facteurs premiers suivants:

1.° Ceux qui résultent du dénominateur

$$\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,\alpha''!\,;$$

2.° Ceux qui résultent du dénominateur de

$$\left(\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}\right)_{x=0};$$

3.° Ceux qui résultent du numérateur de

$$\left(\frac{dF}{dy'}\right)_{x=0};$$

4.° Ceux qui résultent des dénominateurs de y_0', $\frac{y_0''}{2!}$, ..., $\frac{y_0^{(n-1)}}{n-1!}$;
5.° Ceux qui résultent de n.

Nous allons voir que les facteurs premiers correspondant aux trois premiers cas n'augmentent pas indéfiniment avec n.

I. Comme la fonction $F(x, y, y')$ est entière par rapport à x, y et y', les dérivées de cette fonction d'ordre supérieur à son degré sont nulles, et par conséquent m ne peut pas augmenter indéfiniment. Donc les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \alpha', \beta', \ldots, \lambda', \alpha''$, dont la somme est égale à m, ne peuvent augmenter indéfiniment, ni par conséquent leurs facteurs premiers.

II. La dérivée

$$\left(\frac{d^m F}{dx^{\alpha}\, dy^{\beta}\, dy'^{\gamma}}\right)_{x=0},$$

qui est fonction entière de y_0 et y_0' et, par conséquent, de a_0 et a_1, ne peut contenir évidemment en dénominateur que les facteurs premiers qui entrent dans les dénominateurs de a_0 et a_1.

III. La dérivée $\left(\frac{dF}{dy'}\right)_{x=0}$, qui est une fonction entière à coefficients entiers de a_0 et a_1, est une fraction déterminée, et ne peut donc contenir en numérateur des facteurs premiers qui augmentent indéfiniment.

On voit donc que les facteurs premiers du dénominateur de $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$, ou a_n, ne peuvent augmenter indéfiniment que par suite de la présence du facteur n du cinquième cas, et nous avons donc le théorème énoncé.

VIII

DEUXIÈME NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS SATISFAISANT A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

(Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris, 3.e série, t. III. Paris, 1886)

La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2, ... représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à x, y, y', ..., $y^{(i)}$, à coefficients entiers,

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)}) = 0, \tag{2}$$

telle que $\frac{dF}{dy^{(i)}}$ soit différente de zéro, quand $x = 0$, si les dénominateurs de a_{n+1}, a_{n+2}, ... contiennent indéfiniment des facteurs premiers supérieurs respectivement à $n+1$, $n+2$, ...

On peut démontrer ce théorème au moyen d'une analyse semblable à celle qui fut employée pour démontrer le cas particulier considéré dans la Note antérieure, on encore au moyen de l'analyse suivante.

On peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\sum A x^a y^b (y')^c \ldots (y^{(i)})^h = 0, \tag{3}$$

et alors, si on la dérive n fois au moyen de la formule de Leibnitz, on trouve le résultat

symbolique

$$\sum A [x^a y^b (y')^c \dots (y^{(l)})^h]^{(n)} = 0,$$

qui, en posant $x = 0$, donne

$$\sum A n(n-1)\dots(n-a+1)[y^b (y')^c \dots (y^{(l)})^h]^{(n-a)}_{x=0} = 0.$$

En appliquant maintenant la formule de Leibnitz au produit

$$y^b (y')^c \dots (y^{(l)})^h,$$

on trouve le résultat symbolique

$$\sum A n(n-1)\dots(n-a+1)(y_0 + y_0 + \dots + y_0' + y_0' + \dots + y_0^{(l)} + y_0^{(l)} + \dots)^{(n-a)} = 0,$$

où entrent b termes égaux à y_0, c termes égaux à y_0', etc.

Donc

$$\sum A n(n-1)\dots(n-a+1) \, S \frac{(n-a)!\, y_0^{(\alpha)} y_0^{(\alpha')} \dots y_0'^{(\beta)} y_0'^{(\beta')} \dots (y_0^{(l)})^{(\lambda)} (y^{(l)})^{(\lambda')} \dots}{\alpha! \alpha'! \dots \beta! \beta'! \dots \lambda! \lambda'! \dots} = 0,$$

où la somme S se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha + \alpha' + \dots + \beta + \beta' + \dots + \lambda + \lambda' + \dots = n - a,$$

et où le nombre des quantités α, α', ... est b, le nombre des quantités β, β', ... est c, etc.

En séparant maintenant les termes de cette équation qui contiennent la dérivée d'ordre plus élevée $y_0^{(n+l)}$, on trouve un résultat de la forme suivante:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum A S_{(i)} \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!} \frac{y_0^{(\alpha')}}{\alpha'!} \dots \frac{y_0^{(\beta+1)}}{(\beta+1)!} \frac{y_0^{(\beta'+1)}}{(\beta'+1)!} \dots \frac{y_0^{(\lambda+l)}}{(\lambda+l)!} \frac{y_0^{(\lambda'+l)}}{(\lambda'+l)!} \dots \\ & + \sum A (n+1)\dots(n+i) h y_0^b y_0'^c \dots (y_0^{(l)})^{h-1} \frac{y_0^{(n+l)}}{(n+l)!} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\omega = (\beta+1)(\beta'+1)\dots(\lambda+1)(\lambda'+1)\dots(\lambda+2)(\lambda'+2)\dots(\lambda+i)(\lambda'+i)\dots$$

De cette formule on tire le théorème énoncé. En effet, elle fait voir que $\frac{y_0^{(n+i)}}{(n+i)!}$, ou a_{n+i}, ne peut contenir en dénominateur que les facteurs premiers qui entrent dans les dénominateurs des fractions antérieures $\frac{y_0^{(n+i-1)}}{(n+i-1)!}$, $\frac{y_0^{(n+i-2)}}{(n+i-2)!}$, ...; ceux qui entrent dans le numérateur de

$$\sum \mathrm{A}\, h\, y_0'^{\alpha} y_0''^{\beta} \dots (y_0^{(n)})^{h-1},$$

ou

$$\left[\frac{d\mathrm{F}(x, y, \dots, y^{(n)})}{dy^{(n)}}\right]_{x=0};$$

et ceux qui entrent en $(n+1)\dots(n+i)$.

IX

SUR UN THÉORÈME DE M. HERMITE RELATIF A L'INTERPOLATION

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegrundet von Crelle, Band C. Berlin, 1887)

Le résultat important relatif à l'interpolation auquel M. Hermite est arrivé [1] dans le cas d'une fonction uniforme et continue dans une aire limitée par une courbe, peut être étendu au cas d'une fonction uniforme à discontinuités polaires et qui est continue dans une aire annulaire. C'est ce que nous allons faire voir dans cette Note.

Soit $f(x)$ une fonction uniforme, à discontinuités polaires, continue dans l'aire annulaire limitée par deux courbes A et a; et soient a_1 et a_2 les affixes de deux points de l'aire limitée par A, et b_1 et b_2 les affixes de deux points de l'aire limitée par a.

En multipliant par $\frac{(x-a_2)^\beta}{(z-a_2)^\beta}$ les deux membres de l'identité:

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{(z-a_1)}+\frac{(x-a_1)}{(z-a_1)^2}+\cdots+\frac{(x-a_1)^{\alpha-1}}{(z-a_1)^\alpha}+\frac{(x-a_1)^\alpha}{(z-x)(z-a_1)^\alpha}$$

on trouve l'identité:

$$\frac{(x-a_2)^\beta}{(z-x)(z-a_2)^\beta}=\frac{(x-a_2)^\beta}{(z-a_1)(z-a_2)^\beta}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)^\beta}{(z-a_1)^2(z-a_2)^\beta}+\cdots+\frac{(x-a_1)^{\alpha-1}(x-a_2)^\beta}{(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta}$$
$$+\frac{(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta}.$$

---

[1] *Journal für die reine und angwandte Mathematik*, 1878, t. LXXXIV.

Si ensuite on décompose en fractions simples les deux membres de cette identité, on arrive à un résultat de la forme suivante:

$$\frac{1}{z-x}=\Sigma\mathrm{M}\frac{(x-a_1)^m(x-a_2)^n}{(z-a_1)^p}+\Sigma\mathrm{N}\frac{(x-a_1)^{m'}(x-a_2)^{n'}}{(z-a_2)^{p'}}+\frac{(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta},$$

où l'on a $p=1, 2, 3, \ldots, \alpha$, et $p'=1, 2, 3, \ldots, \beta$; où M et N sont des quantités constantes; et où la plus grande valeur de m et de m' est $\alpha-1$, et celle de n et de n' est β.

En multipliant par $f(z)\,dz$ et en intégrant le long du contour A, on obtient le résultat:

$$(1)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_{\mathrm{A}}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\Sigma\mathrm{M}(x-a_1)^m(x-a_2)^n\int_{\mathrm{A}}\frac{f(z)\,dz}{(z-a_1)^p}\\ \displaystyle\qquad+\Sigma\mathrm{N}(x-a_1)^{m'}(x-a_2)^{n'}\int_{\mathrm{A}}\frac{f(z)\,dz}{(z-a_2)^{p'}}+\int_{\mathrm{A}}\frac{f(z)(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta\,dz}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta}.\end{cases}$$

Considérons maintenant l'identité

$$\frac{(z-b_2)^l}{(x-b_2)^l(z-x)}=-\left[\frac{(z-b_2)^l}{(x-b_1)(x-b_2)^l}+\frac{(z-b_1)(z-b_2)^l}{(x-b_1)^2(x-b_2)^l}+\ldots+\frac{(z-b_1)^{k-1}(z-b_2)^l}{(x-b_1)^k(x-b_2)^l}\right.$$
$$\left.+\frac{(z-b_1)^k(z-b_2)^l}{(x-z)(x-b_1)^k(x-b_2)^l}\right],$$

dont le premier membre est susceptible de la décomposition suivante:

$$\frac{(z-b_2)^l}{(x-b_2)^l(z-x)}=\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-b_2}+\frac{z-b_2}{(x-b_2)^2}+\ldots+\frac{(z-b_2)^{l-1}}{(x-b_2)^l}.$$

Nous avons donc un résultat de la forme suivante:

$$\frac{1}{z-x}=\Sigma\mathrm{K}z^\omega+\frac{(z-b_1)^k(z-b_2)^l}{(z-x)(x-b_1)^k(x-b_2)^l},$$

et par conséquent

$$\int_a\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\Sigma\mathrm{K}\int_a f(z)\,.\,z^\omega\,dz+\int_a\frac{f(z)(z-b_1)^k(z-b_2)^l\,dz}{(z-x)(x-b_1)^k(x-b_2)^l},$$

où K représente une fonction entière de $\frac{1}{x-b_1}$ et $\frac{1}{x-b_2}$, et ω représente les nombres $0, 1, 2, \ldots, k+l-1$.

En appliquant aux intégrales précédentes la formule connue:

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\mathrm{A}}\frac{f(z)\,dz}{z-x}-\int_a\frac{f(z)\,dz}{z-x}\right)$$

on obtient la formule suivante:

$$f(x) = \Pi(x) + \Theta(x) + \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{A} \frac{f(z)(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}\,dz}{(z-x)(z-a_1)^{\alpha}(z-a_2)^{\beta}} - \int_{a} \frac{f(z)(z-b_1)^{k}(z-b_2)^{l}\,dz}{(z-x)(x-b_1)^{k}(x-b_2)^{l}}\right],$$

où $\Pi(x)$ représente une fonction de x du degré $\alpha+\beta-1$, et $\Theta(x)$ représente une fonction entière de $\frac{1}{x-b_1}$ et $\frac{1}{x-b_2}$.

Cela posé, soit $f(z)$ une fonction qui n'admette que des discontinuités polaires dans l'aire limitée par la courbe A.

On peut déterminer k et l de manière que la fonction

$$f(z)(z-b_1)^{k}(z-b_2)^{l}$$

soit holomorphe dans l'aire limitée par a, et on ait par conséquent

$$\int_{a} \frac{f(z)(z-b_1)^{k}(z-b_2)^{l}\,dz}{(z-x)(x-b_1)^{k}(x-b_2)^{l}} = 0.$$

Donc

$$f(x) = \Pi(x) + \Theta(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_{A} \frac{f(z)(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}\,dz}{(z-x)(z-a_1)^{\alpha}(z-a_2)^{\beta}}.$$

De la même manière on trouve la formule:

$$(2) \qquad f(x) = \Pi(x) + \Theta(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_{A} \frac{f(z)(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}(x-a_3)^{\gamma}\ldots dz}{(z-x)(z-a_1)^{\alpha}(z-a_2)^{\beta}(z-a_3)^{\gamma}\ldots},$$

qui contient comme cas particulier la formule de M. Hermite.

Voici les conséquences de cette formule.

La fonction $(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}\ldots$ s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha-1$, pour $x=a_1$. De la même manière cette fonction s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $\beta-1$, pour $x=a_2$, etc. Nous avons donc

$$f(a_1) = \Pi(a_1) + \Theta(a_1),\quad f'(a_1) = \Pi'(a_1) + \Theta'(a_1),\quad \ldots\quad f^{(\alpha-1)}(a_1) = \Pi^{(\alpha-1)}(a_1) + \Theta^{(\alpha-1)}(a_1),$$
$$f(a_2) = \Pi(a_2) + \Theta(a_2),\quad f'(a_2) = \Pi'(a_2) + \Theta'(a_2),\quad \ldots\quad f^{(\beta-1)}(a_2) = \Pi^{(\beta-1)}(a_2) + \Theta^{(\beta-1)}(a_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent la fonction $\Pi(x)$, dont le degré est $\alpha+\beta+\gamma+\ldots-1$, remplit les conditions précédentes, qui sont au nombre de $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$, et elle est par suite entièrement déterminée.

D'un autre côté, on peut mettre $\Theta(x)$ sous la forme:

$$\Theta(x) = \frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{(x-b_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-b_1)^k}$$
$$+ \frac{B_1}{x-b_2} + \frac{B_2}{(x-b_2)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b_2)^l}$$
$$+ \text{etc.};$$

et, en posant $F(x) = f(x)(x-b_1)^k$, la fonction $F(x)$ n'admet pas le pôle b_1, et la formule (2) donne:

$$F(x) = (x-b_1)^k \Pi(x) + A_1(x-b_1)^{k-1} + A_2(x-b_1)^{k-2} + \ldots + A_{k-1}(x-b_1) + A_k$$
$$+ (x-b_1)^k \left[\frac{B_1}{x-b_2} + \frac{B_2}{(x-b_2)^2} + \ldots\right] - \frac{(x-b_1)^k}{2i\pi} \int_s \frac{f(z)(x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \ldots dz}{(z-x)(z-a_1)^\alpha (z-a_2)^\beta \ldots}.$$

De cette formule on tire

$$A_k = F(b_1), \quad A_{k-1} = F'(b_1), \quad A_{k-2} = \frac{1}{2} F''(b_1), \quad \ldots, \quad A_1 = \frac{F^{(k-1)}(b_1)}{1.2\ldots(k-1)}.$$

De la même manière on trouve les autres constantes B_1, B_2, etc., qui entrent en $\Theta(x)$.

Donc on détermine les constantes qui entrent en $\Theta(x)$ au moyen des valeurs des fonctions

$$f(x)(x-b_1)^k, \quad f(x)(x-b_2)^l, \quad \ldots$$

et de leurs dérivées, correspondantes aux valeurs b_1, b_2, etc. de x.

En conclusion, les fonctions $\Pi(x)$ et $\Theta(x)$, qui entrent dans la formule (2), sont complètement déterminées quand on donne les valeurs des fonctions

$$f(x), \quad f(x)(x-b_1)^k, \quad f(x)(x-b_2)^l, \quad \text{etc.}$$

et de leurs dérivées, correspondantes aux valeurs a_1, a_2, a_3, etc., b_1, b_2, b_3, etc. de x.

Maintenant, si l'on pose les conditions:

$$|x-a_1| < |z-a_1|, \quad |x-a_2| < |z-a_2|, \quad \text{etc.},$$

la formule (2) fait voir que la fonction $\Pi(x) + \Theta(x)$ représente la fonction $f(x)$ avec d'autant plus d'approximation que le nombre des quantités a_1, a_2, a_3, etc. est plus grand, ou encore que les exposants α, β, γ, etc. sont plus grands.

X

SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES HYPERELLIPTIQUES

Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch.

(Bulletin de la Société Royale des Sciences de Bohême. Prague, 1888)

Soit X un polynôme entier de degré impair n et $f(x, \sqrt{X})$ une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$. Vous savez, Monsieur, qu'on peut toujours mettre cette fonction sous la forme

$$G + \frac{H}{\sqrt{X}},$$

G et H représentant des fonctions rationnelles de x, et qu'on peut décomposer $\frac{H}{\sqrt{X}}$ en termes de la forme $\frac{x^m}{\sqrt{X}}$ et en termes de la forme $\frac{1}{(x-a)^m\sqrt{X}}$. Donc, pour intégrer la fonction $f(x, \sqrt{X})$, on est conduit à considérer des intégrales de la forme

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{X}}$$

et des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{X}}.$$

Notre objet est de donner une manière de ramener ces intégrales aux *intégrales hyperelliptiques normales* de *première, seconde* et *troisième espèce.*

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}},$$

et soit

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

Nous avons

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}} - \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{X'\,dx}{(x-a)^{m-1} X \sqrt{X}}.$$

Si a est différent de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, nous avons

$$\frac{X'}{2(m-1)(x-a)^{m-1}X} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda}$$

$$+ \frac{M_1}{x-a} + \frac{M_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{M_{m-1}}{(x-a)^{m-1}},$$

où A, B, ..., L, M_1, etc. représentent des constantes; et par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}$$

$$- A \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} - B \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} - \ldots - L \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

$$- M_1 \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} - M_2 \int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}} - \ldots - M_{m-1} \int \frac{dx}{(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}.$$

Au moyen de cette formule et des formules analogues qu'on obtient en y posant $m = 2, 3, \ldots, m-1$, on ramène l'étude de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}}$ à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \quad \ldots, \quad \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}.$$

Si a est égal à une des racines de l'équation $X = 0$, par exemple $a = \alpha$, on a

$$\frac{X'}{2(m-1)(x-a)^m(x-\beta)\ldots(x-\lambda)} = \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda}$$

$$+ \frac{M_1}{x-a} + \frac{M_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{M_m}{(x-a)^m},$$

où B, C, ..., L, M_1, M_2, ..., M_m représentent des constantes. On obtient la constante M_m, la seule qu'il nous faut connaître, en déterminant la vraie valeur de la fraction

$$\frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X}$$

quand $x=\alpha$; on a alors

$$M_m = \lim_{x=\alpha} \frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X} = \frac{1}{2(m-1)}.$$

Donc la formule (1) donne

$$\frac{2m-3}{2(m-1)} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}\sqrt{X}}$$
$$-\mathrm{B}\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} - \mathrm{C}\int \frac{dx}{(x-\gamma)\sqrt{X}} - \ldots - \mathrm{L}\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$
$$-M_1\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} - M_2\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{X}} - \ldots - M_{m-1}\int \frac{dx}{(x-\alpha)^{m-1}\sqrt{X}}.$$

Au moyen de cette formule et des formules analogues qu'on obtient en y posant $m=2, 3, \ldots, m-1$, on ramène encore l'étude de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{X}}$ à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots, \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}},$$

quand $a=\alpha$.

Déterminons maintenant les intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots, \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}.$$

De l'identité

$$\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \ldots + \frac{1}{x-\lambda} = \frac{X'}{X}$$

on tire

$$(2) \qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} = -\frac{2}{\sqrt{X}}.$$

D'un autre côté, de la formule

$$\int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)\sqrt{X}} + \frac{1}{2(k+1)}\int \frac{x^{k+1}X'\,dx}{X\sqrt{X}}$$

et de la formule

$$\begin{aligned}\frac{x^{k+1}X'}{X} &= \frac{x^{k+1}}{x-\alpha} + \frac{x^{k+1}}{x-\beta} + \ldots + \frac{x^{k+1}}{x-\lambda} \\ &= nx^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k \\ &\quad + \frac{\alpha^{k+1}}{x-\alpha} + \frac{\beta^{k+1}}{x-\beta} + \ldots + \frac{\lambda^{k+1}}{x-\lambda}\end{aligned}$$

on tire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(2k+2-n)\int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{X}} - a_1\int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{X}} - \ldots - a_k\int \frac{dx}{\sqrt{X}} \\ &= \frac{2x^{k+1}}{\sqrt{X}} + \alpha^{k+1}\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta^{k+1}\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda^{k+1}\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}\end{aligned}\right.$$

et, en posant $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2$,

$$\begin{aligned}&\alpha\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} \\ &\qquad = -(n-2)\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{2x}{\sqrt{X}}, \\ &\alpha^2\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta^2\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda^2\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} \\ &\qquad = -(n-4)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} - a_1\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{2x^2}{\sqrt{X}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha^{n-1}\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} + \beta^{n-1}\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} + \ldots + \lambda^{n-1}\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} \\ &= (n-2)\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}} - a_1\int \frac{x^{n-3}\,dx}{\sqrt{X}} - \ldots - a_{n-2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{2x^{n-1}}{\sqrt{X}}.\end{aligned}$$

Au moyen de ces équations et de l'équation (2) on ramène l'étude des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}},\quad \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}},\quad \ldots,\quad \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{X}}, \dots, \int \frac{x^{n-2}\, dx}{\sqrt{X}},$$

puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \\ \alpha^2 & \beta^2 & \dots & \lambda^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1} & \beta^{n-1} & \dots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

La formule (3) permettra aussi d'exprimer l'intégrale

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{X}}$$

quand $m > n - 2$, au moyen des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{X}}, \dots, \int \frac{x^{n-2}\, dx}{\sqrt{X}}.$$

Donc, en dernière analyse, les intégrales considérées

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}}, \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{X}}$$

peuvent être exprimées au moyen des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{X}}, \dots, \int \frac{x^{n-2}\, dx}{\sqrt{X}}$$

et de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

XI

SUR L'INTERPOLATION AU MOYEN DES FONCTIONS CIRCULAIRES

(Nouvelles Annales de Matématiques, 3.e série, t. IV. Paris, 1885)

I

Le problème de la détermination d'une fonction de x qui reçoive les valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, quand on donne à la variable x les valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, est indéterminé. On y peut satisfaire au moyen d'une fonction entière homogène de $\sin x$ et $\cos x$, et nous avons alors la formule (Hermite, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Paris*, p. 331)

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)}y_1$$
$$+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)}y_2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}y_n.$$

Inversement, $f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène, du degré $n-1$, nous avons une formule de décomposition d'une fraction en des fractions simples, à savoir:

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)} = \frac{f(\sin a_1, \cos a_1)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)}\,\frac{1}{\sin(x-a_1)}$$
$$+\frac{f(\sin a_2, \cos a_2)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)}\,\frac{1}{\sin(x-a_2)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{f(\sin a_n, \cos a_n)}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\,\frac{1}{\sin(x-a_n)}.$$

Nous allons considérer, dans cette Note, le cas où quelques-unes des quantités $a_1, a_2, \ldots$ sont égales, pour chercher la formule de décomposition et la formule correspondante d'interpolation.

II

En supposant premièrement $a_1 = a_2$, on peut déterminer la somme des deux premiers termes de la formule précédente par le chemin qu'on a l'habitude de suivre dans les questions de cette nature, c'est-à-dire, en posant d'abord $a_2 = a_1 + \omega$, en développant ensuite le résultat suivant les puissances de ω, et en posant enfin $\omega = 0$.

On trouve ainsi d'abord

$$\begin{aligned} f(x) = & -\frac{\sin(x-a_1-\omega)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega}F(a_1) \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega}[F(a_1)+\omega F'(a_1)+\ldots] \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\sin(x-a_4)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_3-a_1)\sin(a_3-a_1-\omega)\sin(a_3-a_4)\ldots\sin(a_3-a_n)}y_3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_1-\omega)\sin(a_n-a_3)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}y_n, \end{aligned}$$

où

$$F(a_1) = \frac{f(a_1)}{\sin(a_1-a_3)\sin(a_1-a_4)\ldots},$$

et où l'on représente $f(\sin x, \cos x)$ par $f(x)$; et ensuite, en développant ce résultat suivant les puissances de ω et en posant enfin $\omega = 0$,

$$\begin{aligned} f(x) = & \cos(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)F(a_1) \\ & + \sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)F'(a_1) \\ & + \frac{\sin^2(x-a_1)\sin(x-a_4)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin^2(a_3-a_1)\sin(a_3-a_4)\ldots\sin(a_3-a_n)}f(a_3) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\sin^2(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin^2(a_n-a_1)\sin(a_n-a_3)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}f(a_n). \end{aligned}$$

Cette formule détermine la fonction $f(x)$, étant données les quantités $f(a_1)$, $f'(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, ...

Nous allons maintenant considérer le cas général.

Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=i} \left\{ \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_{k-1})\sin(x-a_{k+1})\ldots\sin(x-a_i)}{\sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_{k-1})\sin(a_k-a_{k+1})\ldots\sin(a_k-a_i)} \right.$$

$$\left. \times \sin(x-a_{i+1})\sin(x-a_{i+2})\ldots\sin(x-a_n)\,\mathrm{F}(a_k) \right\}$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{k=n} \left\{ \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_i)}{\sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_i)} \right.$$

$$\left. \times \sin(x-a_{i+1})\sin(x-a_{i+2})\ldots\sin(x-a_{k-1})\sin(x-a_{k+1})\ldots\sin(x-a_n)\,\mathrm{F}(a_k) \right\},$$

en posant

$$\mathrm{F}(a_k) = \frac{f(a_k)}{\sin(a_k-a_{i+1})\sin(a_k-a_{i+2})\ldots\sin(a_k-a_n)}.$$

Si l'on fait maintenant

$$a_2 = a_1 + \omega, \quad a_3 = a_1 + 2\omega, \quad \ldots, \quad a_k = a_1 + (k-1)\omega, \quad \ldots, \quad a_i = a_1 + (i-1)\omega,$$

la première partie de $f(x)$, que nous appelerons P, prend la forme

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots\sin(x-a_1-(i-1)\omega)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin(k-1)\omega\cdot\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin(i-k)\omega}$$

$$\times \mathrm{F}(a_1+(k-1)\omega).$$

Donc la limite de P, correspondant à $\omega = 0$, que nous appelerons A, sera le coefficient de ω^{i-1} dans le développement de $\mathrm{P}.\omega^{i-1}$ en série, c'est-à-dire:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{d^{i-1}}{d\omega^{i-1}} \left[\frac{\omega^{i-1}\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots\sin(x-a_1-(i-1)\omega)\,\mathrm{F}(a_1+(k-1)\omega)}{\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin(k-1)\omega\cdot\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin(i-k)\omega} \right]_{\omega=0}$$

$$\times \sin(x-a_{i+1})\sin(x-a_{i+2})\ldots\sin(x-a_n).$$

On doit remarquer que, dans cette expression, on ne doit pas écrire $\sin(x-a_1)$, quand $k=1$; on ne doit pas écrire $\sin(x-a_1-\omega)$, quand $k=2$; etc.

Pour obtenir A, nous employons la formule de différentation de Leibnitz, et nous avons

$$\mathrm{A} = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{\sin(x-a_1)}{(k-1)!\,(i-k)!} \left\{ \sin(x-a_1-\omega) + \sin(x-a_1-2\omega) + \ldots + \sin[x-a_1-(i-1)\omega] \right.$$

$$\left. + \frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega} + \frac{(k-2)\omega}{\sin(k-2)\omega} + \ldots + \frac{\omega}{\sin\omega} + \frac{\omega}{\sin\omega} + \ldots + \frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega} + \mathrm{F}[a_1+(k-1)\omega] \right\}^{(i-1)}$$

$$\times \sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n)$$

ou

$$A = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{1}{(k-1)!\,(i-k)!} \sin(x-a_1)\sin(x-a_{i+1})\dots\sin(x-a_n)$$

$$\times \sum \Big\{ (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda} \frac{1^{\alpha}.2^{\beta}\dots(i-1)^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!} \sin\left(x-a_1+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\dots\sin\left(x-a_1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\times \frac{(k-1)^u F^{(u)}(a_1)}{u!\,p!\,q!\dots m!} \left[\frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega}\right]^{(p)}_{\omega=0} \dots \left[\frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega}\right]^{(m)}_{\omega=0} \Big\},$$

où α, β, ..., λ, u, p, q, ..., m représentent toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha+\beta+\dots+\lambda+u+p+q+\dots+m = i-1.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\left[\frac{d^p(x\,\text{coséc}\,x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 2(2^{p-1}-1)B_{p-1},$$

quand p est un nombre pair, et

$$\left[\frac{d^p(x\,\text{coséc}\,x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 0,$$

quand p est un nombre impair, en représentant par B_{p-1} les nombres de Bernoulli. Donc

$$A = \sum X \sin(x-a_1)\sin\left(x-a_1+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\dots\sin\left(x-a_1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin(x-a_{i+1})\dots\sin(x-a_n),$$

où

$$X = (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda+i-k} \cdot \frac{2^{i-1}(k-1)^u.1^{\alpha}.2^{\beta}\dots(i-1)^{\lambda}B_{p-1}B_{q-1}\dots B_{m-1}}{(k-1)!\,(i-k)!\,\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,u!\,p!\,q!\dots m!}$$

$$\cdot (k-1)^p(k-2)^q\dots 1^{r}.1^{s}\dots(i-k)^m$$

$$\times(2^{p-1}-1)(2^{q-1}-1)\dots(2^{m-1}-1)F^{(u)}(a_1),$$

en donnant à α, β, γ, ..., λ, u, p, q, ..., m, k toutes les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$\alpha+\beta+\dots+\lambda+u+p+q+\dots+m = k-1,$$

où k ne peut pas être supérieure à i, et où p, q, ..., m doivent être des nombres pairs.

En appelant B la limite, correspondant à $\omega = 0$, de la deuxième partie de l'expression de $f(x)$, on peut écrire

$$B = \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\sin^i(x - a_1)\sin(x - a_{i+1})\ldots\sin(x - a_n)}{\sin^i(a_k - a_1)\sin(a_k - a_{i+1})\ldots\sin(a_k - a_n)} f(a_k).$$

En substituant les expressions de A et B que nous venons d'obtenir, dans la formule

$$f(x) = A + B,$$

on trouve la fonction $f(x)$ qui prend les valeurs données

$$f(a_1),\ f'(a_1),\ f''(a_1),\ \ldots,\ f^{(i-1)}(a_1),$$
$$f(a_{i+1}),\ f(a_{i+2}),\ \ldots,\ f(a_n).$$

Avec un simple changement de notation, en supposant que les fonctions données sont

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(i-1)}(a),$$
$$f(b_1),\ f(b_2),\ f(b_3),\ \ldots,\ f(b_n),$$

on a

$$A = \sum X \sin(x-a)\sin\left(x - a + \alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(x - a + \lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n),$$

$$B = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin^i(x-a)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin^i(b_k-a)\sin(b_k-b_1)\ldots\sin(b_k-b_n)} f(b_k).$$

En posant

$$b_2 = b_1 + \omega,\ b_3 = b_1 + 2\omega,\ \ldots,\ b_j = b_1 + (j-1)\omega$$

dans les formules précédentes, on trouve la formule qui correspond au cas où sont données les valeurs suivantes:

$$f(a),\quad f'(a),\quad f''(a),\quad \ldots,\ f^{(i-1)}(a),$$
$$f(b_1),\quad f'(b_1),\quad f''(b_1),\quad \ldots,\ f^{(j-1)}(b_1),$$
$$f(b_{j+1}),\ f(b_{j+2}),\ f(b_{j+3}),\ \ldots,\ f(b_n).$$

Considérons maintenant le cas général. Si l'on donne les valeurs suivantes:

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(i-1)}(a),$$
$$f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ \ldots,\ f^{(j-1)}(b),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(e),\ f'(e),\ f''(e),\ \ldots,\ f^{(m-1)}(e),$$

et si l'on cherche la fonction $f(x)$, on peut employer la formule suivante

$$f(x) = A + B + C + \dots,$$

où

$$A = \sum X \sin(x-a) \sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x-a+\beta\frac{\pi}{2}\right) \dots \sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin^j(x-b) \sin^l(x-c) \dots \sin^m(x-e),$$

$$B = \sum X_1 \sin^i(x-a) \sin(x-b) \sin\left(x-b+\alpha\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x-b+\beta\frac{\pi}{2}\right) \dots \sin\left(x-b+\lambda\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin^l(x-c) \dots \sin^m(x-e),$$

$$C = \sum X_2 \sin^i(x-a) \sin^j(x-b) \sin(x-c) \sin\left(x-c+\alpha\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x-c+\beta\frac{\pi}{2}\right) \dots \sin\left(x-c+\lambda\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin^h(x-d) \dots \sin^m(x-e),$$

....

et où les quantités X_1, X_2, ... dérivent de X par le changement de i en j et de $F(a)$ en $F_1(b)$ pour X_1, et de i en l et de $F(a)$ en $F_2(c)$ pour X_2, etc., étant

$$F(a) = \frac{f(a)}{\sin^j(a-b) \sin^l(a-c) \dots \sin^m(a-e)},$$

$$F_1(b) = \frac{f(b)}{\sin^i(b-a) \sin^l(b-c) \dots \sin^m(b-e)},$$

....

Les quantités α, β, ..., λ, u, p, ..., m, k représentent les solutions de l'équation

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda + u + p + q + \dots + m = k - 1,$$

k étant inférieur à $i+1$ en X, à $j+1$ en X_1, à $l+1$ en X_2, etc.

Nous devons remarquer qu'en A on ne doit pas écrire $\sin(x-a)$ dans le terme correspondant à $k=1$, on ne doit pas écrire $\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)$ dans le terme correspondant à $k=2$, etc. La même chose arrive en B, C, ... relativement à b, c, ...

Nous devons encore remarquer que le nombre des quantités α, β, ..., λ est $i-1$ en A, mais que, quand $k=2$, manque α; quand $k=3$, manque β, etc. On doit faire la même observation à l'égard de B, C, ... Le nombre des quantités p, q, ..., m est $i-1$.

Enfin, quand quelqu'une des quantités α, β, ..., p, q, ..., $k-1$, $i-k$, u est nulle, le facteur correspondaot ne doit pas exister dans la formule.

*

Les formules que nous venons de trouver résolvent la question d'interpolation proposée, c'est-à-dire qu'elles déterminent une fonction circulaire, qui prend, elle et ses dérivées, des valeurs données. Nous allons donc considérer maintenant la décomposition de la fraction correspondante.

III

Soit $f(\sin x, \cos x)$ une fonction entière, homogène, du degré $i + j + l + \ldots + m - 1$. Comme les quantités $\sin\left(x - a + \alpha\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(x - a + \beta\frac{\pi}{2}\right)$, etc. sont égales à $\pm \sin(x-a)$ ou à $\pm \cos(x-a)$, la formule de décomposition qui résulte de la formule précédente est

$$\begin{aligned}\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x-a)\sin^j(x-b)\ldots\sin^m(x-e)} = {} & \frac{A_1}{\sin(x-a)} + \frac{A_2\cot(x-a)}{\sin(x-a)} + \ldots + \frac{A_i\cot^{i-1}(x-a)}{\sin(x-a)} \\ & + \frac{B_1}{\sin(x-b)} + \frac{B_2\cot(x-b)}{\sin(x-b)} + \ldots + \frac{B_j\cot^{j-1}(x-b)}{\sin(x-b)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et nous connaissons les coefficients A_1, A_2, A_3, ..., B_1, B_2, ...

Nous allons indiquer rapidement deux autres méthodes pour trouver les coefficients précédents, analogues à celles employées dans la décomposition des fractions rationnelles.

En posant

$$\varphi(x) = \sin^j(x-b)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$

nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)} = {} & A_1\sin^{i-1}(x-a) + A_2\cos(x-a)\sin^{i-2}(x-a) + \ldots \\ & + A_i\cos^{i-1}(x-a) + K\sin^i(x-a).\end{aligned}$$

Cette formule donne

$$A_i = \frac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}.$$

En la différentiant, on trouve le résultat

$$\begin{aligned}\frac{d\,\dfrac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)}}{dx} = {} & (i-1)A_1\sin^{i-2}(x-a)\cos(x-a) + \ldots + A_{i-1}\cos^{i-1}(x-a) \\ & + (i-1)A_i\cos^{i-2}(x-a)\sin(x-a) + \ldots,\end{aligned}$$

qui donne

$$A_{i-1} = \frac{d\,\dfrac{f(\sin a,\ \cos a)}{\varphi(a)}}{da}.$$

De la même manière on trouve les autres coefficients en continuant les différentiations.

On peut aussi calculer les coefficients A_1, A_2, ... au moyen des équations qu'on obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de h dans l'identité suivante:

$$f(\sin a,\ \cos a) + \frac{df}{da} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{da^2} h^2 + \ldots = (A_1 \sin^{i-1} h + A_2 \cos h \sin^{i-2} h + \ldots + A_i \cos^{i-1} h)$$
$$\times \left[\varphi(a) + h \varphi'(a) + \frac{1}{2} h^2 \varphi''(a) + \ldots \right],$$

qui donne

$$f(\sin a,\ \cos a) = A_i \varphi(a),$$
$$f'_a(\sin a,\ \cos a) = A_{i-1} \varphi(a) + A_i \varphi'(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les formules précédentes, appliquées au Calcul intégral, donnent une formule de réduction d'intégrales.

En effet, au moyen de ces formules, on réduit l'intégration des fractions

$$\frac{f(\sin x,\ \cos x)}{\sin^i (x - a) \sin^j (x - b) \ldots},$$

$f(\sin x,\ \cos x)$ étant une fonction entière, homogène, du degré $i + j + \ldots + m - 1$, à l'intégration des fonctions de la forme

$$\frac{\cos^t (x - a)}{\sin^{t+1} (x - a)},$$

qui sont le sujet de des formules de réduction qu'on trouve dans les Traités de Calcul intégral.

On peut encore employer, pour l'intégration de cette fraction, la formule

$$\int \frac{\cos^t (x - a)}{\sin^{t+1} (x - a)} dx = - \int \frac{\cot^t (x - a)}{\sqrt{[1 + \cot^2 (x - a)]}} d \cot (x - a).$$

XII

SUR UNE FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE D'INTERPOLATION

(Enseignement mathématique, t. VI. Genève, 1904)

1. Nous allons nous occuper dans cette Note de la question suivante:

Déterminer la fonction entière et homogène de $\sin x$ et $\cos x$, de plus petit degré, qui prend, elle et ses dérivées, par rapport à x, les valeurs

$$\begin{array}{l} y_1,\ y_1',\ y_1'',\ \ldots,\ y_1^{(\alpha-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_i,\ y_i',\ y_i'',\ \ldots,\ y_i^{(\beta-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k,\ y_k',\ y_k'',\ \ldots,\ y_k^{(\lambda-1)}, \end{array}$$

quand on donne à x les valeurs $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$.

Nous avons étudié déjà ce problème dans un article publié en 1885 aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3.me série, t. IV); mais nous allons le résoudre ici par une analyse plus simple, au moyen d'une représentation des fonctions entières et homogènes de $\sin x$ et $\cos x$, qui donne immédiatement sa solution.

Je partirai, pour cela, de la fraction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\frac{f(\sin x,\ \cos x)}{\sin^\alpha(x-x_1)\ldots\sin^\beta(x-x_i)\ldots\sin^\lambda(x-x_k)},$$

où $f(\sin x,\ \cos x)$ représente une fonction entière et homogène de $\sin x$ et $\cos x$ du degré

$\alpha + \ldots + \beta + \ldots + \lambda - 1$, et, en posant

$$f(\sin x, \cos x) = \cos^m x \, F(\operatorname{tang} x),$$
$$m = \alpha + \ldots + \beta + \ldots + \lambda - 1,$$

je l'écrirai de la manière suivante:

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{\omega \cos x (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^{\alpha} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^{\lambda}}$$

où

$$\omega = \cos^{\alpha} x_1 \ldots \cos^{\beta} x_i \ldots \cos^{\lambda} x_k.$$

Ensuite je considère la fonction rationnelle de $\operatorname{tang} x$

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)},$$

où

$$F_1(\operatorname{tang} x) = (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^{\alpha} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^{\lambda},$$

et je la décompose en fractions simples; ce qui donne

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)}}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i} + \frac{M_2^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^2} + \ldots + \frac{M_{\beta}^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta}} \right],$$

où $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots, M_{\beta}^{(i)}$ représentent des constantes qui coïncident avec les coefficients de $h^{\beta-1}, h^{\beta-2}, \ldots, h^0$ dans le développement de

$$\frac{h^{\beta} F(\operatorname{tang} x_i + h)}{F_1(\operatorname{tang} x_i + h)},$$

et par conséquent

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1 \operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)} \cos x_i \cos x}{\sin (x - x_i)} + \frac{M_2^{(i)} \cos^2 x_i \cos^2 x}{\sin^2 (x - x_i)} + \ldots + \frac{M_{\beta}^{(i)} \cos^{\beta} x_i \cos^{\beta} x}{\sin^{\beta} (x - x_i)} \right].$$

Mais d'un autre côté, si l'on décompose en des fractions simples la fraction $\frac{1}{F_1(\operatorname{tang} x)}$ et si l'on représente par $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}; \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_{\beta}; \ldots$ les numérateurs de ces

fractions, on trouve

$$\frac{F(\tang x)}{F_1(\tang x)} = \frac{A_1 F(\tang x)}{\tang x - \tang x_1} + \frac{A_2 F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_1)^\alpha}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{B_1 F(\tang x)}{\tang x - \tang x_i} + \frac{B_2 F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_i)^\beta}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{P_1 F(\tang x)}{\tang x - \tang x_k} + \frac{P_2 F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_k)^2} + \ldots + \frac{P_\lambda F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_k)^\lambda},$$

et, par conséquent, en posant $\tang x = \tang x_i + h$,

$$\frac{h^\beta F(\tang x_i + h)}{F_1(\tang x_i + h)} = B_1 \left[h^{\beta-1} F(\tang x_i) + h^\beta F'(\tang x_i) + \ldots \right]$$
$$+ B_2 \left[h^{\beta-2} F(\tang x_i) + h^{\beta-1} F'(\tang x_i) + \frac{1}{2} h^\beta F''(\tang x_i) + \ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ B_\beta \left[F(\tang x_i) + hF'(\tang x_i) + \ldots + \frac{h^{\beta-1}}{(\beta-1)!} F^{(\beta-1)}(\tang x_i) + \ldots \right]$$
$$+ Rh^\beta,$$

où Rh^β représente la partie du développement considéré qui provient des fractions

$$\frac{A_1 h^\beta F(\tang x_i + h)}{\tang x_i + h - \tang x_1}, \quad \frac{A_2 h^\beta F(\tang x_i + h)}{(\tang x_i + h - \tang x_1)^2}, \quad \text{etc.}$$

On a donc

$$M_1^{(i)} = B_1 F(\tang x_i) + B_2 F'(\tang x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-1)!} F^{(\beta-1)}(\tang x_i),$$

$$M_2^{(i)} = B_2 F(\tang x_i) + B_3 F'(\tang x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-2)!} F^{(\beta-2)}(\tang x_i),$$

$$M_\beta^{(i)} = B_\beta F(\tang x_i),$$

où $F'(\tang x_i)$, $F''(\tang x_i)$, ... représentent les valeurs que les dérivées, $F'(t)$, $F''(t)$, ..., de $F(t)$ prennent, quand on y pose $t = \tang x_i$.

De ces formules et de la suivante:

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^{\alpha}(x-x_1)\ldots\sin^{\beta}(x-x_i)\ldots\sin^{\lambda}(x-x_k)} = \frac{F(\operatorname{tang} x)}{\omega\cos x\, F_1(\operatorname{tang} x)},$$

il résulte la suivante:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = \frac{\varphi(x)}{\omega}\sum_{i=1}^{k}\Bigg\{ & \left[\frac{B_1\cos x_i}{\sin(x-x_i)} + \frac{B_2\cos^2 x_i\cos x}{\sin^2(x-x_i)} + \ldots + \frac{B_\beta\cos^\beta x_i\cos^{\beta-1} x}{\sin^\beta(x-x_i)}\right]F(\operatorname{tang} x_i) \\ & + \left[\frac{B_2\cos x_i}{\sin(x-x_i)} + \frac{B_3\cos^2 x_i\cos x}{\sin^2(x-x_i)} + \ldots + \frac{B_\beta\cos^{\beta-1} x_i\cos^{\beta-2} x}{\sin^{\beta-1}(x-x_i)}\right]F'(\operatorname{tang} x_i) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{(\beta-1)!}\cdot\frac{B_\beta\cos x_i}{\sin(x-x_i)}F^{(\beta-1)}(\operatorname{tang} x_i)\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\varphi(x) = \sin^{\alpha}(x-x_1)\ldots\sin^{\beta}(x-x_i)\ldots\sin^{\lambda}(x-x_k),$$

qui est celle que nous proposions d'obtenir.

Au moyen de cette formule on peut résoudre immédiatement le problème antérieurement énoncé.

En effet, l'équation

$$f(\sin x,\ \cos x) = \cos^m x\, F(\operatorname{tang} x)$$

et celles qui résultent de sa dérivation par rapport à x, déterminent les quantités

$$F(\operatorname{tang} x_i),\ F'(\operatorname{tang} x_i),\ F''(\operatorname{tang} x_i),\ \ldots,$$

quand sont données les quantités

$$f(\sin x_i,\ \cos x_i),\ f'_x(\sin x_i,\ \cos x_i),\ f''_{xx}(\sin x_i,\ \cos x_i),\ \ldots$$

2. Voici encore un autre problème qu'on peut résoudre au moyen de la formule qu'on vient de trouver, en remarquant que l'expression qu'elle donne pour $f(\sin x, \cos x)$ peut être réduite premièrement à la forme

$$f(\sin x,\ \cos x) = K_m\cos^m x + K_{m-2}\cos^{m-2} x + \ldots + \sin x\left[L_{m-1}\cos^{m-1} x + L_{m-3}\cos^{m-3} x + \ldots\right],$$

et qu'ensuite, au moyen des égalités connues

$$2^{a-1}\cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1}\cos(a-2)x + \binom{a}{2}\cos(a-4)x + \ldots + \frac{1}{2}\binom{a}{\frac{1}{2}a},$$

si a est un entier pair, et

$$2^{a-1}\cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1}\cos(a-2)x + \binom{a}{2}\cos(a-4)x + \ldots + \binom{a}{\frac{1}{2}(a-1)}\cos x,$$

si a est un entier impair, elle peut être réduite à la forme suivante:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = {} & R_m \cos mx + R_{m-2}\cos(m-2)x + \ldots + R_1 \cos x \\ & + S_m \sin mx + S_{m-2}\sin(m-2)x + \ldots + S_1 \sin x, \end{aligned} \right.$$

quand m est *impair*, et à la suivante:

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = {} & R_m \cos mx + R_{m-2}\cos(m-2)x + \ldots + R_0 \\ & + S_m \sin mx + S_{m-2}\sin(m-2)x + \ldots + S_2 \sin 2x, \end{aligned} \right.$$

quand m est pair.

On peut donc résoudre, au moyen de la formule (1), le problème qui a pour but de chercher les coefficients qui entrent dans une des expressions (2) ou (3), quand sont données les valeurs qu'elle et ses dérivées prennent aux points $x_1, x_2, \ldots, x_k$, en déterminant premièrement, au moyen de ces valeurs et de la formule (1), la fonction $f(\sin x, \cos x)$, et en la réduisant ensuite à une des formes (2) ou (3).

IV

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES ÁS DERIVADAS PARCIAES DE SEGUNDA ORDEM

(Dissertação inaugural apresentada á Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra para obter o grau de doutor. Coimbra, 1875)

INTRODUCÇÃO

O problema da integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem é considerado pelos geometras como um dos mais difficeis do Calculo Integral, e não se sabe actualmente resolver senão em casos particulares. Escolhi-o para assumpto d'esta dissertação pela sua grande importancia.

Proponho-me expôr os trabalhos de Euler, Laplace, Monge, Ampère, Boole e Imschenetsky para a sua solução, intermeando-os de algumas indagações minhas.

No *Jornal da Escola Polytechnica de Paris* (cad. XVII) encontra-se uma memoria de Ampère sobre a theoria geral dos integraes das equações ás derivadas parciaes de uma ordem qualquer, para a qual a attenção dos geometras foi chamada recentemente por Imschenetsky, professor na Universidade de Kazan ([1]).

Porém, tanto Ampère como Imschenetsky, que expõe toda a theoria do sabio francez, consideram só o caso de haver duas variaveis independentes; nem sei que geometra algum tenha generalisado mais a questão. O capitulo I da minha dissertação é todo destinado á theoria de Ampère, que generaliso porém, estendendo-a a um numero qualquer de variaveis independentes, usando para esse fim de alguns theoremas muito conhecidos da theoria das combinações.

Muitas vezes, para integrar as equações de segunda ordem, recorre-se á transformação da equação proposta n'outra mais simples. D'estas transformações tracto no capitulo II, onde exponho primeiramente as transformações de Euler e Imschenetsky, e depois outra que contem como caso particular a de Laplace.

A equação em que todas as derivadas parciaes de segunda ordem entram na primeira potencia, é aquella de que os geometras se têem occupado mais. Monge, seguindo um caminho analogo ao que se seguia no caso das equações de primeira ordem, deu um methodo para integral-as. Este methodo porém, sendo só applicavel quando a proposta tinha um inte-

---

([1]) V. G. Imschenetsky: *Estudo sobre os methodos de integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem de uma funcção de duas variaveis independentes*, traduzido do russo para francez por J. Hoüel.

gral intermedio, Ampère tractou de resolver o problema sem esta restricção em uma memoria notavel, publicada no cad. XVIII do jornal que contem a que foi anteriormente mencionada. O methodo, que para esse fim deu, não differe essencialmente do de Monge, no caso de haver integral intermedio. No caso de o não haver, Ampère ensinou a transformar a proposta n'outra mais simples. Estes trabalhos de Ampère foram completados e aperfeiçoados por Imschenetsky, que deu a theoria geral d'esta transformação. Os geometras inglezes Boole e Morgan occuparam-se tambem das equações lineares de segunda ordem; porém os seus methodos são, como o de Monge, fundados na existencia de um integral intermedio. O capitulo III da minha dissertação é destinado á exposição dos trabalhos de Monge, Ampère e Imschenetsky.

No capitulo IV continuo em primeiro logar o estudo, principiado anteriormente, das equações da forma $F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0$, cuja importancia exprimiu Ampère pelas palavras seguintes, que, segundo diz Imschenetsky, são ainda verdadeiras na epocha actual: «Les équations aux différentielles partielles du second ordre qui ne contient que la dérivée $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ de cet ordre, doivent être examinées avec d'autant plus de soin, que c'est souvent en y ramenant les autres équations aux différentielles partielles du seconde ordre qu'on parvient à les intégrer. L'intégration des équations comprises dans la forme $F\left(x, y, z\, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0$ peut être régardée comme la première question à résoudre pour arriver à celle de toutes les équations du secondre ordre. Mais ce problème paraît devoir échapper encore longtemps aux méthodes de l'Analyse actuelle; on ne sait encore integrer ces équations que dans les cas où elles ont une intégrale intermédiaire, et dans le cas des équations lineaires intégrées par M. de Laplace».

Laplace occupou-se da integração das equações d'esta forma, quando são lineares relativamente a $z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dx\,dy}$. Imschenetsky considerou as equações, mais geraes, em que sómente $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ e $\frac{dz}{dx}$, ou $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ e $\frac{dz}{dy}$ entram no primeiro grau. É o que póde ver no n.º 25.

Quando existe integral intermedio, empregam estes geometras, para o achar, o methodo da integração das equações differenciaes ordinarias a tres variaveis. Reflectindo sobre este methodo, nota-se que se póde dar-lhe uma forma nova, que o torna applicavel a outras equações. Póde ver-se no n.º 16 o methodo assim generalisado e as condições para elle ter logar, no n.º 27 a sua applicação á equação (5), que contem aquella de que se occupou Imschenetsky, e no n.º 28 á equação mais geral (10).

Laplace, quando a sua equação não tem integral intermedio, transforma-a n'outra. O mesmo faz Imschenetsky. Esta transformação, que se póde ver no n.º 25, está comprehendida na transformação mais geral que considero no n.º 16, e é no n.º 27 applicada ao caso de a equação dada não poder ser resolvida relativamente a $\frac{d^2 y}{dx\,dy}$.

As equações em que só entram as derivadas de segunda ordem $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ e $\frac{d^2 z}{dx^2}$, ou $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ e $\frac{d^2 z}{dy^2}$, são muito importantes, porque a ellas se reduzem muitas outras pela transformação dada no capitulo II. No n.º 29 apresento algumas indagações sobre um grupo d'estas equações, que creio não ter sido ainda considerado, consequencia da generalidade que dei ao methodo de Laplace.

Nenhum geometra, que eu saiba, se tem occupado da integração de a equações simultaneas ás derivadas parciaes com a variaveis dependentes, exceptuando Combescure [1], que integrou um grupo particular de equações de primeira ordem. A esta doutrina consagro um pequeno capitulo, onde indico rapidamente o modo de estender a theoria dos integraes, dada por Ampère para o caso de uma equação unica, ao caso das equações simultaneas e onde integro um grupo d'estas equações.

Coimbra, 1875.

---

[1] *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris* (1872).

CAPITULO I

Theoria dos integraes das equações ás derivadas parciaes

1. Seja

$$F = 0$$

uma equação ás derivadas parciaes de ordem q com n variaveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

O integral d'esta equação diz-se *geral* quando satisfaz sómente a ella e ás equações que resultam de a derivar successivamente em ordem ás variaveis independentes; isto é, quando, derivando-o um numero m de vezes, egual ou maior que q, e derivando $m - q$ vezes a proposta, resultam dois systemas identicos de equações, qualquer que seja m.

Sendo pois o numero das equações de um e outro systema assim obtidos differentes, deve este integral conter um numero sufficiente de arbitrarias para se poder identifical-os.

Se o integral satisfizer a mais relações do que a proposta e suas derivadas, diz-se *particular* ou *singular*.

2. Suppondo o integral expresso por uma equação unica, é facil de ver que o primeiro dos systemas de equações mencionados contem um numero d'ellas igual á somma dos numeros de combinações que se podem fazer com n letras, tomando-as desde uma a uma até m a m, entrando a mesma letra de uma até m vezes em cada combinação, mais uma unidade, e portanto, segundo uma formula conhecida (Francoeur, ed. de Coimbra, parte III, pag. 41), egual a

$$[(m + n) \mathrm{C}\, n].$$

O numero de equações do segundo systema é egual a

$$[(m + n - q) \mathrm{C}\, n].$$

Deve pois, para o integral ser geral, haver um numero de arbitrarias não inferior a

$$\begin{aligned}\delta &= [(m+n)\,\mathrm{C}\,n] - [(m+n-q)\,\mathrm{C}\,n] \\ &= [(m+n-1)\,\mathrm{C}\,(n-1)] + [(m+n-2)\,\mathrm{C}\,(n-1)] + \ldots + [(m+n-q)\,\mathrm{C}\,(n-1)].\end{aligned}$$

Vê-se portanto que o numero das arbitrarias deve augmentar com m, condição a que satisfazem as funcções arbitrarias de *argumentos* determinados. Estes argumentos são funcções das variaveis e cada funcção póde ter mais do que um argumento.

3. Os argumentos, a que vimos de nos referir, são funcções explicitas das variaveis ou funcções implicitas das mesmas. Em ambos os casos a forma do integral é a seguinte:

Contem $k+1$ equações com k argumentos, g funcções arbitrarias (mais tarde determinaremos este numero) *com suas derivadas e integraes, em numero de g', obtidos por derivação ou integração relativa aos argumentos, considerados como variaveis independentes.*

É aos integraes d'esta forma que diz respeito o estudo, que vamos fazer.

4. Um integral da forma indicada dá, derivando-o até á ordem m relativamente a cada uma das variaveis independentes, um systema de equações cujo numero é egual a

$$(k+1)\,[(m+n)\,\mathrm{C}\,n];$$

e a proposta e suas derivadas até á ordem m formam um systema de equações cujo numero é egual a

$$[(m+n-q)\,\mathrm{C}\,n].$$

A differença entre estes numeros é egual a

$$\delta' = k\,[(m+n)\,\mathrm{C}\,n] + [(m+n-1)\,\mathrm{C}\,(n-1)] + [(m+n-2)\,\mathrm{C}\,(n-1)] + \ldots + [(m+n-q)\,\mathrm{C}\,(n-1)];$$

e deve portanto haver no integral um numero de arbitrarias, para se poder identificar os dois systemas de equações, que não seja inferior a δ'.

5. O integral e suas derivadas até á ordem m, formando um numero de equações egual a $[(m+n)\,\mathrm{C}\,n]\,(k+1)$, podem determinar as derivadas da variavel dependente z, até á mesma ordem, independentemente das derivadas dos argumentos, porque o numero dos argumentos, suas derivadas e derivadas de z é tambem egual a $[(m+n)\,\mathrm{C}\,n]\,(k+1)$.

6. Como a eliminação, de que acabámos de fallar, póde fazer desapparecer algumas funcções arbitrarias, vamos estudar a lei do desapparecimento d'estas funcções nas derivadas successivas de z.

Sejam α, β, ... os argumentos de uma funcção arbitraria que entre no integral, seja $\varphi(\alpha, \beta, \ldots)$ esta funcção e, suppondo

$$\alpha = f(x_0, x_v, x_u, \ldots),$$

tomemos α em logar de x_0 para variavel independente.

Derivando esta equação relativamente a x_v, resulta, collocando as derivadas parciaes entre parentheses, quando α é tomado em logar de x_0 para variavel independente,

$$\frac{df}{dx_v} + \frac{df}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{dx_v}\right) = 0,$$

d'onde se tira

$$\left(\frac{dx_0}{dx_v}\right) = -\frac{\frac{df}{dx_v}}{\frac{df}{dx_0}}.$$

Dependendo α, por hypothese, de x_0 e x_v, segue-se que $\left(\frac{dx_0}{dx_v}\right)$ não póde representar zero nem infinito.

Derivando a mesma equação relativamente a α, resulta a relação

$$\left(\frac{dx_0}{d\alpha}\right) = \frac{1}{\frac{df}{dx_0}},$$

que mostra do mesmo modo que $\left(\frac{dx_0}{d\alpha}\right)$ não póde representar zero nem infinito.

Posto isto, se considerarmos uma serie de derivadas de z, tem logar para ellas o theorema seguinte:

Se uma funcção arbitraria de α, derivada relativamente a α de outra que entre no integral, apparece pela primeira vez em uma das derivadas de z, de ordem p, deve apparecer em todas as derivadas de z da mesma ordem que differem d'aquella sómente pelo numero das derivações relativas ás variaveis de que depende α.

Se uma derivada de z, de ordem p, não differir de outra, de ordem $p-1$, pelo numero de derivações relativas ás variações que entram em α, a primeira só contem as derivadas, relati-

vamente a α, das funcções arbitrarias, dependentes d'este argumento, que entrarem na derivada de ordem $p-1$.

Suppondo primeiramente que α só depende de x_θ e x_υ, consideremos as tres derivadas da ordem p

$$A = \frac{d^p z}{dx_1^a \dots dx_\upsilon^{b+1} \dots dx_\theta^{d-1} \dots dx_n^e},$$

$$B = \frac{d^p z}{dx_1^a \dots dx_\upsilon^b \dots dx_\theta^d \dots dx_n^e},$$

$$C = \frac{d^p z}{dx_1^a \dots dx_\upsilon^{b-1} \dots dx_\theta^{d+1} \dots dx_n^e}.$$

Estas derivadas são todas da ordem $b+d$ relativamente ás variaveis x_θ e x_υ, que entram em α, são porém todas da mesma ordem relativamente a cada uma das outras variaveis.

A serie das derivadas de ordem $p-1$, d'onde resulta a segunda das precedentes, é

$$D = \frac{d^{p-1} z}{dx_1^{a-1} \dots dx_\upsilon^b \dots dx_\omega^c \dots dx_\theta^d \dots dx_n^e},$$

. . . .

$$E = \frac{d^{p-1} z}{dx_1^a \dots dx_\upsilon^{b-1} \dots dx_\omega^c \dots dx_\theta^d \dots dx_n^e},$$

. . . .

$$G = \frac{d^{p-1} z}{dx_1^a \dots dx_\upsilon^b \dots dx_\omega^c \dots dx_\theta^{d-1} \dots dx_n^e},$$

. . . .

$$H = \frac{d^{p-1} z}{dx_1^a \dots dx_\upsilon^b \dots dx_\omega^c \dots dx_\theta^d \dots dx_n^{e-1}}.$$

Tomando α para variavel independente em logar de x_θ e derivando G e E relativamente a x_υ, resulta

$$\left(\frac{dG}{dx_\upsilon}\right) = A + B\left(\frac{dx_\theta}{dx_\upsilon}\right),$$

$$\left(\frac{dE}{dx_\upsilon}\right) = B + C\left(\frac{dx_\theta}{dx_\upsilon}\right),$$

e derivando as restantes quantidades D, ..., H relativamente a uma variavel qualquer x_ω, que não entre em α,

$$\frac{d\mathrm{D}}{dx_\omega}=\frac{d^p z}{dx_1^{a-1}\dots dx_v^b\dots dx_\omega^{c+1}\dots dx_\theta^d\dots dx_n^e},$$

....

$$\frac{d\mathrm{H}}{dx_\omega}=\frac{d^p z}{dx_1^{a}\dots dx_v^b\dots dx_\omega^{c+1}\dots dx_\theta^d\dots dx_n^{e-1}}.$$

As duas primeiras equações provam que A e C contêem as funcções arbitrarias, derivadas de $\varphi(\alpha, \beta, \dots)$ relativamente a α, que entrarem em B, visto que, por hypothese, não entram em E nem em G, nem portanto em $\left(\frac{d\mathrm{E}}{dx_v}\right)$ e $\left(\frac{d\mathrm{G}}{dx_v}\right)$, pois que para formar estas derivadas α deve ser considerada como constante, nem entram tambem em $\left(\frac{dx_\theta}{dx_v}\right)$, cuja expressão é dada pelas equações que definem o integral considerado (n.º 3).

Para chegar a esta conclusão suppõe-se que $\left(\frac{dx_\theta}{dx_v}\right)$ não é identicamente nulla nem infinita, isto é, que α depende de x_θ e x_v.

No segundo grupo das equações precedentes, por ser α considerado como constante nas derivadas, que entram nos primeiros membros, não podem nos segundos membros entrar funcções arbitrarias de α, que não entrem em D, ..., H.

Considerando as derivadas B, A e

$$\frac{d^p z}{dx_1^a\dots dx_v^{b+2}\dots dx_\theta^{d-2}\dots dx_n^e},$$

ou as derivadas B, C e

$$\frac{d^p z}{dx_1^a\dots dx_v^{b-2}\dots dx_\theta^{d+2}\dots dx_n^e},$$

e repetindo as considerações que vêem de ser feitas a respeito das derivadas A, B e C, vê-se que contêem as funcções arbitrarias derivadas de $\varphi(\alpha, \beta, \dots)$, relativamente a α, que entram respectivamente em A ou C, e portanto em B.

Continuando do mesmo modo demonstra-se completamente o theorema enunciado.

Resta considerar o caso em que α depende de um numero qualquer de variaveis independentes.

Consideremos, para isso, a derivada

$$B = \frac{d^p z}{dx_1^a \ldots dx_v^b \ldots dx_u^h \ldots dx_\theta^d \ldots dx_n^e}.$$

Se fizermos n'ella variar b e d de modo que $b+d$ fique constante, obtem-se uma serie de derivadas a que se applica, como vimos de ver, o theorema enunciado.

Fazendo depois variar em cada elemento d'esta serie h de modo que $h+d$ fique constante, vêem outras series de derivadas ás quaes é applicavel o theorema enunciado. E, como cada uma d'estas series tem um elemento commum com a que primeiramente se considerou, é o mesmo theorema applicavel a todas as derivadas que nellas entram.

Continuando do mesmo modo, mostra-se que o theorema tem logar qualquer que seja o numero de variaveis de que dependa α.

Se houver só duas variaveis independentes, este theorema coincide com o de Ampère, o caso porém de α conter só uma variavel, que é uma excepção ao de Ampère, tal como este sabio o enunciou, está incluido, como é facil de mostrar, no theorema mais geral precedentemente enunciado.

7. Vejamos outro theorema relativo ao apparecimento das funcções arbitrarias nas derivadas successivas de z.

É

$$B = \frac{\left(\frac{dG}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx_\theta}{d\alpha}\right)},$$

e portanto, se G e x_θ contiverem uma funcção arbitraria de α e se outra funcção arbitraria, derivada de qualquer ordem d'aquella relativamente a α, não entrar nem no integral nem nas derivadas de z de ordem inferior a p, esta nova funcção de α entrará em B, se não entrar em um factor commum ao numerador e ao denominador da fracção precedente.

Fazendo em G variar p, deve chegar-se a um estado em que esta ultima circumstancia se dê, visto que o denominador da expressão de B permanece inalteravel e o numerador muda constantemente, por mudar a funcção arbitraria, a que vimos de nos referir, e o factor que a encerra.

Quando este estado se der, B e as derivadas da mesma ordem, a que se applica o theorema demonstrado no n.º 6, contêem uma funcção arbitraria que não entra nem no integral nem nas derivadas de z de ordem inferior a p.

Depois, nas derivadas seguintes de z em ordem a x_θ devem apparecer novas funcções arbitrarias de α, derivadas das primeiras relativamente a α. É o que mostra, com effeito, a expressão

$$\frac{d^p z}{dx_1^a \ldots dx_i^b \ldots dx_\theta^{d+1} \ldots dx_n^e} = \frac{\left(\frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx_\theta}{d\alpha}\right)},$$

pois que em B ha uma funcção arbitraria de α, que, por não entrar no integral, não entra em x_θ, nem portanto a sua derivada em $\left(\frac{dx_\theta}{d\alpha}\right)$.

O mesmo se diz relativamente aos outros argumentos.

8. Demonstremos agora o theorema seguinte:

O integral de uma equação ás derivadas parciaes da ordem q com n variaveis independentes contem pelo menos q funcções arbitrarias distinctas com n — 1 argumentos.

Com effeito, o numero das condições, a que as arbitrarias têem de satisfazer, é, como vimos, egual a

$$k[(m+n)\,\mathrm{C}\,n] + [(m+n-1)\,\mathrm{C}\,(n-1)] + [(m+n-2)\,\mathrm{C}\,(n-1)] + \ldots + [(m+n-q)\,\mathrm{C}\,(n-1)].$$

D'estas equações $k[(m+n)\,\mathrm{C}\,n]$ servem para determinar os argumentos e as suas derivadas relativamente a x_1, x_2, ...; devem portanto as restantes ser em numero egual ou inferior ao das funcções arbitrarias e suas derivadas em ordem aos argumentos, que entram no systema de equações que resultam de derivar o integral, até á ordem m, relativamente a x_1, x_2, ..., x_n.

Vamos determinar este ultimo numero.

1.° Se no integral entram g funcções arbitrarias com l argumentos cada uma, o numero das funcções arbitrarias que, por esta parte, entram no systema que resulta de o derivar relativamente a x_1, x_2, ..., x_n, até á ordem m, é egual a $g[(m+l)\,\mathrm{C}\,l]$.

2.° Supponhamos que no integral entram tambem funcções arbitrarias obtidas por derivação de algumas das que vêem de ser mencionadas relativamente aos argumentos, considerados como variaveis independentes.

Consideremos uma, de ordem θ, e vejamos qual o numero de funcções arbitrarias que introduz no systema, que não estejam comprehendidas no caso primeiro.

O numero das derivadas de ordem m d'esta funcção arbitraria relativamente aos seus argumentos (Francoeur, ed. de Coimbra, parte III, pag. 39) é egual a

$$[(m+l-1)\,\mathrm{C}\,(l-1)];$$

e estas derivadas, por serem de ordem $m+\theta$, não estão comprehendidas entre as funcções arbitrarias consideradas no caso primeiro.

Do mesmo modo o numero das derivadas de ordem $m-1$, $m-2$, ..., $m-\theta+1$ da funcção considerada relativamente aos seus argumentos são respectivamente eguaes a

$$[(m+l-2)\,\mathrm{C}\,(l-1)],\ [(m+l-3)\,\mathrm{C}\,(l-1)],\ \ldots,\ [(m+l-\theta)\,\mathrm{C}\,(l-1)].$$

Logo o numero total das funcções arbitrarias introduzidas de novo é egual a

$$[(m+l-1)\,\mathrm{C}\,(l-1)]+[(m+l-2)\,\mathrm{C}\,(l-1)]+\ldots+[(m+l-\theta)\,\mathrm{C}\,(l-1)].$$

3.º Se no integral da equação proposta entram funcções provenientes da integração das funcções arbitrarias consideradas no caso primeiro, relativamente aos argumentos, é facil de ver que, para achar o numero das funcções arbitrarias derivadas d'estes integraes, que não entram no caso primeiro, temos de sommar numeros que coincidem com os das combinações de certos numeros de lettras, inferiores a $m+l$, tomadas $l-1$ a $l-1$, $l-2$ a $l-2$, $l-3$ a $l-3$, etc.

Consideremos, com effeito, o integral $\int\int\int\ldots\int\varphi\, d\alpha^i\, d\beta^h\ldots$ Derivando-o até á ordem m relativamente aos argumentos cujas differenciaes não entram neste integral, obtemos um grupo de arbitrarias, que não entram no caso primeiro, cujo numero é egual ao das combinações de $m+t$ letras, tomadas t a t, t repesentando o numero de argumentos que entram em φ e cujas differenciaes não entram na expressão considerada, o qual é porisso menor do que l.

Podemos pois dizer que é condição necessaria para que o integral seja geral a seguinte:

$$[(m+n-1)\,\mathrm{C}\,(n-1)]+[(m+n-2)\,\mathrm{C}\,(n-1)]+\ldots+[(m+n-q)\,\mathrm{C}\,(n-1)]\leqq g\,[(m+l)\,\mathrm{C}\,l]+g',$$

onde

$$g'=\Sigma\,[(m+\mathrm{A})\,\mathrm{C}\,(l-1)]+\Sigma'\,[(m+\mathrm{B})\,\mathrm{C}\,(l-2)]+\ldots,$$

A, B, ... representando numeros inteiros positivos, inferiores a l.

Sendo a mais alta potencia de m no primeiro membro de grau $n-1$ e de grau l a do segundo, e devendo esta desegualdade ter logar qualquer que seja m, temos pois

$$l\geqq n-1,\quad g\geqq q$$

que é o que se queria demonstrar.

Determinação dos argumentos e suas propriedades

9. Demonstradas as propriedades geraes dos integraes das equações de ordem qualquer e com um numero qualquer de variaveis independentes, vamos agora procurar as equações que determinam os argumentos, seguindo o mesmo caminho que Ampère, generalisando porém o seu processo para um numero qualquer de variaveis independentes.

Para mais simplicidade na exposição consideraremos as equações de segunda ordem; porém o que vamos expor applica-se ás de uma ordem qualquer.

Seja a equação proposta

$$(1) \qquad F\left[x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n, \frac{d^2 z}{dx_1^2}, \frac{d^2 z}{dx_1\, dx_2}, \ldots, \frac{d^2 z}{dx_n^2}\right] = 0,$$

onde

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \; p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \; p_3 = \frac{dz}{dx_3}, \; \ldots$$

Representando por α um argumento do seu integral e suppondo

$$\alpha = f(x_\theta, x_v, x_u, \ldots)$$

podemos tomar α em logar de x_θ para variavel independente, e temos assim as equações simultaneas

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dx_v} + \dfrac{d\alpha}{dx_\theta}\left(\dfrac{dx_\theta}{dx_v}\right) = 0, \\ \dfrac{d\alpha}{dx_u} + \dfrac{d\alpha}{dx_\theta}\left(\dfrac{dx_\theta}{dx_u}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

que determinam α, quando se conhece $\left(\dfrac{dx_\theta}{dx_v}\right)$, $\left(\dfrac{dx_\theta}{dx_u}\right)$, ..., quantidades que vamos determinar por meio da equação proposta.

Para isso, derivando (1) $m-2$ vezes em ordem a x_θ, resulta

$$\frac{dF}{d\frac{d^2z}{dx_\theta^2}}\cdot\frac{d^mz}{dx_\theta^m}+\Sigma\frac{dF}{d\frac{d^2z}{dx_\theta\,dx_v}}\cdot\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-1}dx_v}+\Sigma\frac{dF}{d\frac{d^2z}{dx_v^2}}\cdot\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-2}dx_v^2}+\Sigma\frac{dF}{d\frac{d^2z}{dx_v\,dx_u}}\cdot\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-2}dx_v\,dx_u}+R=0,$$

onde R contem as derivadas de z de ordem inferior a m e onde a u e v se devem dar todos os valores desde 1 até n, excluindo θ.

Tomando na equação precedente α para variavel independente em logar de x_θ, acha-se, pelas formulas

$$\left(\frac{d\frac{d^{m-1}z}{dx_\theta^{m-1}}}{dx_v}\right)=\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-1}dx_v}+\frac{d^mz}{dx_\theta^m}\left(\frac{dx_\theta}{dx_v}\right),$$

$$\left(\frac{d\frac{d^{m-1}z}{dx_\theta^{m-2}dx_v}}{dx_v}\right)=\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-2}dx_v^2}+\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-1}dx_v}\left(\frac{dx_\theta}{dx_v}\right),$$

$$\left(\frac{d\frac{d^{m-1}z}{dx_\theta^{m-2}dx_v}}{dx_u}\right)=\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-2}dx_v\,dx_u}+\frac{d^mz}{dx_\theta^{m-1}dx_v}\left(\frac{dx_\theta}{dx_u}\right),$$

$$\frac{d^mz}{dx_\theta^m}=\frac{\left(\frac{d\frac{d^{m-1}z}{dx_\theta^{m-1}}}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx_\theta}{d\alpha}\right)},$$

uma equação da forma

$$P\cdot\frac{\left(\frac{d\frac{d^{m-1}z}{dx_\theta^{m-1}}}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx_\theta}{d\alpha}\right)}+Q=0,$$

onde P e Q representam expressões que só dependem das derivadas de z de ordem inferior a m e das derivadas de ordem m que entram nos primeiros membros das equações anteriores.

Mas, por outra parte, demonstrou-se no n.º 7 que póde sempre dar-se a m um valor tal que em $\frac{d^m z}{dx_0^m}$ exista uma funcção arbitraria de α que não entre nas derivadas de z de ordem inferior a m; e esta funcção arbitraria não entra tambem nas derivadas

$$\left(\frac{d\,\frac{d^{m-1} z}{dx_0^{m-1}}}{dx_r}\right), \quad \left(\frac{d\,\frac{d^{m-1} z}{dx_0^{m-2}\,dx_r}}{dx_r}\right), \quad \left(\frac{d\,\frac{d^{m-1} z}{dx_0^{m-2}\,dx_r}}{dx_u}\right),$$

visto que, para as deduzir de

$$\frac{d^{m-1} z}{dx_0^{m-1}}, \quad \frac{d^{m-1} z}{dx_0^{m-2}\,dx_r},$$

deve considerar-se α como constante.

Logo a funcção arbitraria considerada entra no coefficiente de Q e não entra nem em P nem em Q; e estas expressões devem ser porisso separadamente nullas.

Temos pois

$$(3) \qquad \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dv_0^2}} - \Sigma \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dv_0\,dx_r}} \left(\frac{dx_0}{dx_r}\right) + \Sigma \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dx_r^2}} \left(\frac{dx_0}{dx_r}\right)^2 + \Sigma \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dx_r\,dx_u}} \left(\frac{dx_0}{dx_r}\right)\left(\frac{dx_0}{dx_u}\right) = 0,$$

equação ás derivadas parciaes de primeira ordem, e

$$\mathrm{P} = 0.$$

Por meio das equações (2) e (3) vê-se ainda que α satisfaz á equação ás derivadas parciaes de primeira ordem

$$\frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dx_0^2}} \left(\frac{d\alpha}{dx_0}\right)^2 + \Sigma \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dx_0\,dx_r}} \cdot \frac{d\alpha}{dx_r} \cdot \frac{d\alpha}{dx_0} + \Sigma \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dx_r^2}} \left(\frac{d\alpha}{dx_r}\right)^2 + \Sigma \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,\frac{d^2 z}{dx_r\,dx_u}} \frac{d\alpha}{dx_r} \cdot \frac{d\alpha}{dx_u} = 0.$$

Consideremos dois casos particulares d'estas formulas, de que teremos de usar adeante.

1.º Se o argumento α fôr egual a x_0, a equação (3) dá

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0^2}} = 0;$$

logo em (1) não deve entrar neste caso $\dfrac{d^2 z}{dx_0^2}$.

Conclue-se d'aqui que cada argumento, que se conhece, póde servir para transformar a proposta n'outra mais simples, tomando este argumento para variavel independente.

2.º Se α depender sómente de duas variaveis x_0 e x_v, a equação (3) dá

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0^2}} - \frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0\, dx}} \left(\frac{dx_0}{dx}\right) + \frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx^2}} \left(\frac{dx_0}{dx}\right)^2 = 0,$$

e α satisfaz porisso á equação

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0^2}} \left(\frac{d\alpha}{dx_0}\right)^2 - \frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0\, dx}} \frac{d\alpha}{dx_0} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx^2}} \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 = 0.$$

Se o integral da equação proposta contiver dois argumentos eguaes, que dependam sómente de x_0 e x_v, os dois valores de $\left(\dfrac{dx_0}{dx}\right)$, dados pela primeira equação, devem ser eguaes, e portanto os coefficientes da equação proposta devem satisfazer á condição

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0\, dx}}\right)^2 - 4\frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0^2}} \cdot \frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx^2}} = 0.$$

Se o integral da equação proposta contiver dois argumentos eguaes a x_0, a relação anterior mostra que deve ser

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0^2}} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{d\dfrac{d^2 z}{dx_0\, dx}} = 0,$$

e que porisso aquella equação não deve conter $\dfrac{d^2 z}{dx_0^2}$ nem $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$.

10. Se houver só duas variaveis independentes x e y, as formulas (2) e (3) reduzem-se a

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt}-\frac{d\mathrm{F}}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d\mathrm{F}}{dr}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

onde

$$r=\frac{d^2 z}{dx^2},\ s=\frac{d^2 z}{dx\,dy},\ t=\frac{d^2 z}{dy^2}.$$

11. Se o valor de $\frac{d^2 z}{dx_0^2}$, tirado da formula

$$\frac{d^2 z}{dx_0^2}=\frac{\left(\frac{dp_0}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx_0}{d\alpha}\right)},$$

contem uma funcção arbitraria de α, que não entra nas derivadas de ordem precedente, não é necessario derivar a proposta para fazer a transformação indicada precedentemente, pois que fazendo $m=2$ nas formulas do n.º 9 obtêem-se as relações que servem para transformar a proposta n'outra, que se decompõe nas duas

$$\mathrm{P}=0,\quad \mathrm{Q}=0.$$

No caso de duas variaveis independentes estas relações são

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=r+s\left(\frac{dy}{dx}\right),\quad \left(\frac{dq}{dx}\right)=s+t\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$t=\frac{\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)},$$

onde $p=\frac{dz}{dx}$, $q=\frac{dz}{dy}$, das quaes adeante havemos de usar.

CAPITULO II

Transformações das equações ás derivadas parciaes

12. O que vamos dizer n'este capitulo applica-se no caso de a equação proposta ter um numero qualquer de variaveis independentes, todavia, para simplicidade, supporemos que a proposta só tem duas e portanto é da forma

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Não ha um methodo geral para integrar a equação (1), recorre se por isso muitas vezes á mudança das variaveis independentes ou dependente, para a reduzir a uma forma antecipadamente estudada. É d'esta transformação que vamos tractar.

13. Mostrou-se no capitulo precedente que, tomando os argumentos para variaveis independentes, pode transformar-se a proposta n'outra mais simples.

No caso de se poderem obter por qualquer processo os argumentos em funcção de x e y, a transformação é facil e vamos effeitual-a.

Sejam

$$\alpha = f_1(x, y), \quad \beta = f_2(x, y)$$

as duas equações, que ligam as novas variaveis α e β com as antigas x e y, sem suppor ainda que α e β são os argumentos do integral de (1). Teremos, para transformar (1), de

empregar as formulas:

$$p=\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dx},$$

$$q=\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dy},$$

$$r=\frac{d^2z}{d\alpha^2}\cdot\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+2\frac{d^2z}{d\alpha\,d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d^2z}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dx^2},$$

$$s=\frac{d^2z}{d\alpha^2}\cdot\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d^2z}{d\alpha\,d\beta}\left(\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dy}\cdot\frac{d\beta}{dx}\right)+\frac{d^2z}{d\beta^2}\cdot\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dy}\cdot+\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dx\,dy},$$

$$t=\frac{d^2z}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+2\frac{d^2z}{d\alpha\,d\beta}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\cdot\frac{d\beta}{dy}+\frac{d^2z}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2+\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dy^2}.$$

Obteremos assim a equação

$$\Phi\left(\frac{d^2z}{d\alpha^2},\ \frac{d^2z}{d\alpha\,d\beta},\ \frac{d^2z}{d\beta^2},\ \frac{dz}{d\alpha},\ \frac{dz}{d\beta},\ z,\ \alpha,\ \beta\right)=0. \tag{2}$$

1.º Se α e β forem os argumentos do integral de (1), devem ser nullas as derivadas de (2) em ordem a $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ e $\frac{d^2z}{d\beta^2}$, e a equação (2) toma a forma

$$\Phi\left(\frac{d^2z}{d\alpha\,d\beta},\ \frac{dz}{d\alpha},\ \frac{dz}{d\beta},\ z,\ \alpha,\ \beta\right)=0.$$

Esta transformação, devida a Euler, é aproveitavel quando as raizes X_1 e X_2 da equação

$$\frac{dF}{dr}X^2+\frac{dF}{ds}X+\frac{dF}{dt}=0$$

são funcções sómente de x e y; pois que os argumentos α e β devem satisfazer ás equações ás derivadas parciaes de primeira ordem

$$\frac{dF}{dr}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\frac{dF}{ds}\,\frac{d\alpha}{dx}\,\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dF}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2=0,$$

$$\frac{dF}{dr}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\frac{dF}{ds}\,\frac{d\beta}{dx}\,\frac{d\beta}{dy}+\frac{dF}{dt}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2=0,$$

ou

$$\frac{d\alpha}{dx} = X_1 \frac{d\alpha}{dy}, \quad \frac{d\beta}{dx} = X_2 \frac{d\beta}{dy},$$

e porisso devem coincidir com os argumentos das funcções arbitrarias que entram nos integraes d'estas equações.

2.º A condição para que em (2) não entre $\frac{dz}{d\alpha}$ é

$$\frac{dF}{dp} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{dF}{dq} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{dF}{ds} \cdot \frac{d^2\alpha}{dx\,dy} + \frac{dF}{dt} \cdot \frac{d^2\alpha}{dy^2} = 0.$$

A condição para que desappareça $\frac{dz}{d\beta}$ resulta da precedente, mudando α em β.

Se os argumentos α e β do integral satisfizerem a uma d'estas condições, a equação (2) toma uma das formas

$$\Phi\left(\frac{d^2z}{d\alpha\,d\beta}, \frac{dz}{d\alpha}, z, \alpha, \beta\right) = 0,$$

$$\Phi\left(\frac{d^2z}{d\alpha\,d\beta}, \frac{dz}{d\beta}, z, \alpha, \beta\right) = 0.$$

3.º Se os argumentos forem eguaes e tomarmos o seu valor para uma das variaveis independentes, a equação (2) reduzir-se-ha á forma

$$\Phi\left(\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{dz}{dx}, z, x, \alpha\right),$$

onde não entram (n.º 9) as derivadas $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ e $\frac{d^2z}{d\alpha\,dx}$, nem tambem a derivada $\frac{dz}{d\alpha}$. Esta ultima circumstancia foi demonstrada por Ampère do modo seguinte.

As expressões das derivadas $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{d^2z}{dx^2}$, tiradas do integral da equação considerada, contêem só as funcções arbitrarias de α que entram no integral, e a expressão da derivada de $\frac{dz}{d\alpha}$ contem uma nova funcção arbitraria de α. Logo se a equação considerada contivesse $\frac{dz}{d\alpha}$, e se portanto fosse

$$\frac{dz}{d\alpha} = F_1\left(\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{dz}{dx}, z, x, \alpha\right),$$

as expressões mencionadas precedentemente não poderiam satisfazer a esta equação, visto que introduziriam no seu primeiro membro uma funcção arbitraria que não existiria no segundo.

14. Tambem se póde transformar a proposta mudando de variavel dependente.

Suppondo

$$z = f(x, y, u),$$

sendo u a nova variavel dependente, as formulas para esta transformação são

$$p = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

$$q = \frac{df}{dy} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dy},$$

$$r = \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 \frac{d^2 f}{dx\, du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2},$$

$$s = \frac{d^2 f}{dx\, dy} + \frac{d^2 f}{dx\, du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{d^2 f}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{d^2 f}{du\, dy} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dx\, dy},$$

$$t = \frac{d^2 f}{dy^2} + 2 \frac{d^2 f}{du\, dy} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dy^2},$$

e reduzem a equação (1) a outra da forma

$$\Phi \left(\frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{d^2 u}{dx\, dy}, \frac{d^2 u}{dy^2}, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, u, x, y \right) = 0.$$

Por esta transformação não se póde fazer desapparecer nenhuma das derivadas parciaes de segunda ordem.

15. Póde tambem transformar-se a proposta mudando ao mesmo tempo de variaveis independentes e dependente.

O estudo dos trabalhos de Ampère sobre este objecto e dos trabalhos de Lagrange sobre a variação das constantes arbitrarias nos integraes das equações ás derivadas parciaes levou Imschenetsky a um modo muito geral e simples de effeituar esta transformação, que vamos expôr.

Seja

$$(3) \qquad z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \eta),$$

sendo α e β as novas variaveis independentes e η uma nova variavel dependente.

Tiremos d'esta equação os valores das derivadas p, q, r, s e t para os substituir na proposta (1), e determinemos as novas variaveis α e β de modo que p e q tenham o mesmo valor, que teriam, se α e β fossem constantes, para o que deve ser

$$(4) \qquad \frac{d\omega}{d\alpha} + \frac{d\omega}{dq_1} \cdot \frac{dq_1}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{d\omega}{dq_1} \cdot \frac{dq_1}{d\beta} = 0,$$

equações que escreveremos, para brevidade, do modo seguinte:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = 0.$$

Virão as egualdades

$$p = \frac{d\omega}{dx}, \quad q = \frac{d\omega}{dy},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d^2\omega}{dx\,dy} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta} \cdot \frac{d\beta}{dy},$$

e

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial\beta} \cdot \frac{d\beta}{dy},$$

que se podem escrever, para brevidade, do modo seguinte:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2\omega}{dx^2} + h, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d^2\omega}{dx\,dy} + k, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2\omega}{dy^2} + l,$$

onde

$$h = \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx}, \quad k = \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta} \cdot \frac{d\beta}{dy}, \quad l = \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial\beta} \cdot \frac{d\beta}{dy},$$

e ás quaes vamos dar outra forma.

Derivando as equações (4) relativamente a x e y, resultam as relações

$$\frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \cdot \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dy} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \cdot \frac{d\beta}{dy} = 0,$$

de onde se tiram os valores $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}$, que, substituidos nas expressões precedentes de h, k e l, dão:

$$h = -\frac{1}{D}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \beta}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \beta}\frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \alpha}\right)^2\right],$$

$$k = -\frac{1}{D}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}\left(\frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \beta} + \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial \frac{d\omega}{dx}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \alpha}\right],$$

$$l = -\frac{1}{D}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \beta}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \beta}\frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial \frac{d\omega}{dy}}{\partial \alpha}\right)^2\right].$$

sendo

$$D = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2.$$

As expressões de $\frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}$, assim transformadas, substituam-se na proposta e

desenvolva-se depois o seu primeiro membro pela formula de Taylor. Teremos

$$F\left(x,\ y,\ \omega,\ \frac{d\omega}{dx},\ \frac{d\omega}{dy},\ \frac{d^2\omega}{dx^2}+h,\ \frac{d^2\omega}{dx\,dy}+k,\ \frac{d^2\omega}{dy^2}+l\right)$$

$$=F\left(x,\ y,\ \omega,\ \frac{d\omega}{dx},\ \frac{d\omega}{dy},\ \frac{d^2\omega}{dx^2},\ \frac{d^2\omega}{dx\,dy},\ \frac{d^2\omega}{dy^2}\right)$$

$$+\frac{dF}{d\,\frac{d^2\omega}{dx^2}}h+\frac{dF}{d\,\frac{d^2\omega}{dx\,dy}}k+\frac{dF}{d\,\frac{d^2\omega}{dy^2}}l+\frac{1}{2}\,\frac{d^2F}{d\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right)^2}k^2+\ldots=0,$$

equação, que, substituindo por h, k, l, ω, x e y os seus valores, toma a forma

$$\Phi\left(\frac{d^2\eta}{d\alpha^2},\ \frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta},\ \frac{d^2\eta}{d\beta^2},\ \frac{d\eta}{d\alpha},\ \frac{d\eta}{d\beta},\ \eta,\ \alpha,\ \beta\right)=0. \tag{5}$$

Se (3) é um integral particular da proposta, vem

$$\frac{dF}{d\,\frac{d^2\omega}{dx^2}}h+\frac{dF}{d\,\frac{d^2\omega}{dx\,dy}}k+\frac{dF}{d\,\frac{d^2\omega}{dy^2}}l+\frac{1}{2}\,\frac{d^2F}{d\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right)^2}k^2+\ldots=0,$$

onde se devem substituir tambem h, k, l, ω, x e y pelos seus valores, o que a reduz á forma (5).

Posto isto:

1.º Se α fôr um argumento do integral pedido, será tambem um argumento do integral de (5), visto que no integral da proposta deve entrar η; portanto, segundo o que se demonstrou no capitulo precedente, (5) não deve conter $\frac{d^2\eta}{d\alpha^2}$, e tem por isso a forma

$$\Phi\left(\frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta},\ \frac{d^2\eta}{d\beta^2},\ \frac{d\eta}{d\alpha},\ \frac{d\eta}{d\beta},\ \eta,\ \alpha,\ \beta\right)=0.$$

2.º Se α e β forem argumentos do integral da proposta, deverá faltar $\frac{d^2\eta}{d\alpha^2}$ e $\frac{d^2\eta}{d\beta^2}$; logo (5) deverá reduzir-se á forma

$$\Phi\left(\frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta},\ \frac{d\eta}{d\alpha},\ \frac{d\eta}{d\beta},\ \eta,\ \alpha,\ \beta\right)=0,$$

e, se fôr $\alpha = \beta$, á forma

$$\Phi\left(\frac{d^2\eta}{d\alpha^2}, \frac{d\eta}{d\alpha}, \eta, \alpha, \beta\right) = 0.$$

3.º Se α e β não forem argumentos do integral pedido, a proposta transformar-se-ha n'outra, que, sem ter as simplificações que tem nos casos considerados, póde todavia ser algumas vezes mais facil de integrar do que aquella.

16. Finalmente exporemos uma transformação da equação (1), que dá origem a um methodo de integração, que contem como caso particular o methodo de Laplace e a generalisação que d'elle deu Imschenetsky, a qual adeante desenvolveremos.

Seja u uma nova variavel dependente e

$$u = f(x, y, z, p, q). \tag{6}$$

Derivando esta equação, resulta

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dp}r + \frac{df}{dq}s = \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q + \frac{df}{dp}s + \frac{df}{dq}t = \psi(x, y, z, p, q, r, s, t).$$

Se eliminarmos entre estas tres equações e a proposta tres das quantidades z, p, q, r, s e t e desapparecerem ao mesmo tempo as outras tres, virá uma equação de primeira ordem

$$\Phi\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Tirando o valor de u d'esta equação e substituindo-o em (6), vem outra equação de primeira ordem, que, integrada, dá o valor de z.

Se pela eliminação precedente chegarmos ao resultado

$$z = f_1\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right), \quad p = f_2\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right),$$

vem, derivando a primeira equação e attendendo á segunda, a equação linear, de que adeante

nos occuparemos:

$$\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{du}\frac{du}{dx}+\frac{df_1}{d\varphi}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{df_1}{d\psi}\cdot\frac{d^2u}{dx\,dy}-f_2=0,$$

a qual determina o valor de u. Depois a equação $z=f_1\left(x,\ y,\ u,\ \frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy}\right)$ determina z.

Se chegassemos a duas equações que determinassem z e q, r e p, s e p, s e q ou t e q, procedia-se do mesmo modo.

Vejamos agora quaes as condições para que esta theoria se possa applicar.

Se designarmos por a, b, c e e quatro quaesquer das quantidades z, p, q, r, s e t, devem ser identicamente nullos um certo numero dos determinantes funccionaes

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{da}, & \frac{dF}{db}, & \frac{dF}{dc}, & \frac{dF}{de} \\ \frac{df}{da}, & \frac{df}{db}, & \frac{df}{dc}, & \frac{df}{de} \\ \frac{d\varphi}{da}, & \frac{d\varphi}{db}, & \frac{d\varphi}{dc}, & \frac{d\varphi}{de} \\ \frac{d\psi}{da}, & \frac{d\psi}{db}, & \frac{d\psi}{dc}, & \frac{d\psi}{de} \end{vmatrix}$$

para ser applicavel o methodo precedente.

Por exemplo, r, s e t eliminam-se conjunctamente, quando é identicamente nullo o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{dr}, & \frac{dF}{ds}, & \frac{dF}{dt} \\ \frac{df}{dp}, & \frac{df}{dq}, & 0 \\ 0, & \frac{df}{dp}, & \frac{df}{dq} \end{vmatrix}.$$

Temos assim as equações

$$u = f(x, y, z, p, q), \quad f_2\left(x, y, z, p, q, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Se forem identicamente nullos os determinantes funccionaes

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dz}, & \frac{df}{dq} \\ \frac{df_2}{dz}, & \frac{df_2}{dq} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{df}{dp}, & \frac{df}{dq} \\ \frac{df_2}{dp}, & \frac{df_2}{dq} \end{vmatrix},$$

z e p eliminar-se-hão ao mesmo tempo que q nas duas ultimas equações e virá uma equação de primeira ordem, que dará o valor de u.

CAPITULO III

Equação de Monge e Ampère

17. Vamos integrar a equação

$$(1) \qquad \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0,$$

que foi estudada por Monge, no caso de ser $\mathrm{N} = 0$ e de admittir um integral intermedio, e mais tarde por Ampère com toda a generalidade. É os processos de integração seguidos por estes dois geometras que vamos expôr.

Methodo de Monge

18. A equação

$$\mathrm{U} = \varphi(\mathrm{V}),$$

sendo U e V duas funcções de x, y, z, p, q e φ uma funcção arbitraria, equivale ao systema de duas equações simultaneas $\mathrm{U} = \alpha$, $\mathrm{V} = \beta$, em que α e β são duas constantes arbitrarias. Differenciando estas duas equações e eliminando $\frac{dy}{dx}$ entre as equações assim obtidas:

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{U}}{dy}dy + \frac{d\mathrm{U}}{dz}(p\,dx + q\,dy) + \frac{d\mathrm{U}}{dp}(r\,dx + s\,dy) + \frac{d\mathrm{U}}{dq}(s\,dx + t\,dy) = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{V}}{dy}dy + \frac{d\mathrm{V}}{dz}(p\,dx + q\,dy) + \frac{d\mathrm{V}}{dp}(r\,dx + s\,dy) + \frac{d\mathrm{V}}{dq}(s\,dx + t\,dy) = 0,$$

resulta uma equação da forma (1). Conclue se d'aqui que a equação (1) póde ter um integral

da forma indicada. Devemos todavia notar que do que precede não resulta que o tenha sempre, e que se conhecem mesmo casos em que não existe integral intermedio.

Inversamente a equação proposta, que determina uma só das tres quantidades r, s e t, combinada com as expressões

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

dá as equações

$$\mathrm{H}(dx\,dp - dy\,dq) + 2\mathrm{K}\,dx\,dq + \mathrm{M}\,dx^2 - \mathrm{N}\,dq^2 = -t\left[\mathrm{H}\,dy^2 - 2\mathrm{K}\,dx\,dy + \mathrm{L}\,dx^2 + \mathrm{N}(dx\,dp + dy\,dq)\right],$$

$$\mathrm{L}(dy\,dq - dx\,dp) + 2\mathrm{K}\,dy\,dp + \mathrm{M}\,dy^2 - \mathrm{N}\,dp^2 = -r\left[\mathrm{H}\,dy^2 - 2\mathrm{K}\,dx\,dy + \mathrm{L}\,dx^2 + \mathrm{N}(dx\,dp + dy\,dq)\right],$$

$$\mathrm{H}\,dy\,dp + \mathrm{L}\,dx\,dq + \mathrm{M}\,dx\,dy + \mathrm{N}\,dp\,dq = s\left[\mathrm{H}\,dy^2 - 2\mathrm{K}\,dx\,dy + \mathrm{L}\,dx^2 + \mathrm{N}(dx\,dp + dy\,dq)\right],$$

que se decompõem nas quatro seguintes:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}\,(dx\,dp - dy\,dq) + 2\,\mathrm{K}\,dx\,dq + \mathrm{M}\,dx^2 - \mathrm{N}\,dq^2 = 0, \\ \mathrm{L}\,(dy\,dq - dx\,dp) + 2\,\mathrm{K}\,dy\,dp + \mathrm{M}\,dy^2 - \mathrm{N}\,dp^2 = 0, \\ \mathrm{H}\,dy\,dp + \mathrm{L}\,dx\,dq + \mathrm{M}\,dx\,dy + \mathrm{N}\,dp\,dq = 0, \\ \mathrm{H}\,dy^2 - 2\,\mathrm{K}\,dx\,dy + \mathrm{L}\,dx^2 + \mathrm{N}\,(dx\,dp + dy\,dq) = 0. \end{cases}$$

Combinando a ultima equação com cada uma das precedentes, forma-se um só systema distincto. Consideremos pois o systema formado pela primeira equação e pela ultima e transformemol-o n'um systema linear relativamente ás differenciaes, que entram n'elle.

Por ser

$$dx\,dp + dy\,dq = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

a ultima equação transforma-se na seguinte:

$$(\mathrm{H} + \mathrm{N}t)\,dy^2 - 2\,(\mathrm{K} - \mathrm{N}s)\,dx\,dy + (\mathrm{L} + \mathrm{N}r)\,dx^2 = 0,$$

que dá, attendendo á proposta (1) e pondo

$$\mathrm{G} = \mathrm{K}^2 - \mathrm{H}\mathrm{L} + \mathrm{M}\mathrm{N},$$

a equação

$$dy = \frac{\mathrm{K} - \mathrm{N}s \mp \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{H} + \mathrm{N}t}\,dx,$$

ou, por ser $dq = s\,dx + t\,dy$,

$$\mathrm{H}\,dy + \mathrm{N}\,dq - (\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}})\,dx = 0.$$

A primeira das equações (2), em virtude da equação precedente, dá depois

$$\mathrm{H}\,dp - (\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}})\,dq + \mathrm{M}\,dx = 0.$$

Temos pois, para integrar a proposta, de empregar as tres equações ás differenciaes ordinarias

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{H}\,dy + \mathrm{N}\,dq - (\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}})\,dx = 0, \\ &\mathrm{H}\,dp + (\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}})\,dq + \mathrm{M}\,dx = 0, \\ &dz = p\,dx + q\,dy, \end{aligned} \right.$$

correspondentes ao signal superior, ou as que correspondem ao signal inferior, e ligar os seus integraes $\mathrm{U} = \alpha$ e $\mathrm{V} = \beta$ por uma funcção arbitraria.

É este o methodo de Monge, que foi depois completado por outros geometras, como vamos ver.

19. Para integrar cada systema das equações simultaneas (3), quando esta integração não póde fazer-se immediatamente, póde seguir-se o processo seguinte, devido a Boole.

Se $u = c$ é um integral de um dos systemas das equações (3), devem ellas tornar identicamente nulla a equação

$$\begin{aligned} du &= \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz + \frac{du}{dp}\,dp + \frac{du}{dq}\,dq \\ &= \left[\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\,p - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dp} + \frac{\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dq}\right] dx \\ &+ \left[\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\,q + \frac{\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dp} - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dq}\right] dy = 0, \end{aligned}$$

para o que deve ser

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{H}_1 = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\,p - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dp} + \frac{\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dq} = 0, \\ &\mathrm{H}_2 = \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\,q + \frac{\mathrm{H} \mp \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dp} - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{du}{dq} = 0, \end{aligned} \right.$$

equações ás derivadas parciaes simultaneas com cinco variaveis independentes.

As equações (4) podem integrar-se pelo methodo de Jacobi ou pelo de Boole. Segundo aquelle methodo terão tres integraes distinctos com uma constante arbitraria cada um, quando tiver logar identicamente a condição

$$(H_1, H_2) = \pm 2 \frac{K}{N} \sqrt{G} \frac{du}{dz} + \left(\Delta_1 \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} + \Delta_2 \frac{L}{N} \right) \frac{du}{dp} - \left(\Delta_1 \frac{H}{N} + \Delta_2 \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \right) \frac{du}{dq} = 0,$$

representando por (H_i, H_k) a expressão

$$(H_i, H_k) = \Sigma \left(\frac{dH_i}{dx} \cdot \frac{dH_k}{d\frac{du}{dx}} - \frac{dH_i}{d\frac{du}{dx}} \cdot \frac{dH_k}{dx} \right),$$

estendendo o sommatorio ás variaveis x, y, z, p, q e representando por Δ_1 e Δ_2 as operações

$$\Delta_1 = \frac{d}{dx} + \frac{d}{dz} p - \frac{L}{N} \cdot \frac{d}{dp} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \cdot \frac{d}{dq};$$

$$\Delta_2 = \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz} q + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} \frac{d}{dp} - \frac{H}{N} \cdot \frac{d}{dq}.$$

Para que a expressão (H_1, H_2) seja identicamente nulla são necessarias e sufficientes as condições

$$G = 0, \quad \Delta_1 \frac{K}{N} + \Delta_2 \frac{L}{N} = 0, \quad \Delta_1 \frac{H}{N} + \Delta_2 \frac{K}{N} = 0. \tag{5}$$

No caso das condições (5) serem satisfeitas, os systemas de equações (3) não são pois disdinctos e o systema unico que ellas formam admitte tres integraes distinctos.

Nos outros casos deve juntar-se ás equações (4) a equação $H_3 = (H_1, H_2) = 0$; e temos pois de integrar tres equações ás derivadas parciaes simultaneas de primeira ordem, a que satisfazem dois integraes particulares distinctos, quando tem logar as condições

$$(H_1, H_3) = 0, \quad (H_2, H_3) = 0,$$

e a que não podem satisfazer mais.

Em ambos os casos precedentes obtem-se um ou dois integraes intermedios da proposta, ligando por uma funcção arbitraria dois dos integraes particulares obtidos; depois, pelos processos de integração das equações de primeira ordem, passa-se para o integral finito pedido.

As equações (4) podem ainda ter um integral só ou nenhum, e n'estes casos não se póde applicar o methodo de Monge, fundado sobre a existencia de um integral intermedio.

Tudo o que vimos de dizer resulta de applicar ás equações (4) a theoria de Jacobi sobre a integração das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, estendida por Bour ás equações simultaneas [1].

Methodo de Ampère

20. Ampère, por um estudo completo da theoria dos integraes, achou formulas para integrar a equação (1) sem se fundar na existencia de um integral intermedio. É este methodo, mais geral e claro do que o de Monge, que vamos expôr.

Demonstrou-se no n.º 10 que, tomando α em logar de y para variavel independente, sendo α um argumento do integral pedido, e suppondo que o valor de t, tirado da egualdade

$$t=\frac{\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)},$$

contem uma funcção arbitraria de α, que não entra nem no integral nem nas suas derivadas de primeira ordem, as relações

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{dp}{dx}\right)=r+s\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \left(\frac{dq}{dx}\right)=s+t\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

transformam a proposta n'uma identidade, que se decompõe por isso em duas equações simultaneas. Para achar estas equações, eliminemos r e s entre as equações precedentes e a proposta e egualemos a zero o coefficiente de t; resultará assim o systema de equações

$$\mathrm{H}\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)\right]+2\,\mathrm{K}\left(\frac{dq}{dx}\right)+\mathrm{M}-\mathrm{N}\left[\left(\frac{dq}{dx}\right)\right]^2=0,$$

$$\mathrm{H}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^2-2\,\mathrm{K}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathrm{L}+\mathrm{N}\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)\right]=0.$$

---

[1] Veja-se a memoria sobre a *Integração das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem*, por V. G. Imschenetsky, traduzido do russo para francez por J. Hoüel.

Para transformar estas equações em outras lineares relativamente ás derivadas que n'ellas entram, eliminaremos $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ na ultima, o que dá

$$(\mathrm{H}+\mathrm{N}t)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2(\mathrm{K}-\mathrm{N}s)\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathrm{L}+\mathrm{N}r=0,$$

ou, resolvendo em ordem a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e attendendo á proposta (1),

$$(\mathrm{H}+\mathrm{N}t)\left(\frac{dy}{dx}\right)-\mathrm{K}+\mathrm{N}s\mp\sqrt{\mathrm{G}}=0,$$

onde

$$\mathrm{G}=\mathrm{K}^2-\mathrm{HL}+\mathrm{MN}.$$

Esta equação dá, eliminando-se s por meio da segunda das equações (A),

$$\mathrm{H}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathrm{N}\left(\frac{dq}{dx}\right)-\mathrm{K}\mp\sqrt{\mathrm{G}}=0.$$

Em virtude da equação precedente a primeira das equações, que se quer transformar, dá, eliminando $\frac{dy}{dx}$,

$$\mathrm{H}\left(\frac{dp}{dx}\right)+(\mathrm{K}\mp\sqrt{\mathrm{G}})\left(\frac{dq}{dx}\right)+\mathrm{M}=0.$$

Resta ver, para se applicar o que vem de dizer-se, se, no caso da equação (1), entra em t uma funcção arbitraria, que não entre nas derivadas de ordem precedente (n.º 11). Para isso basta eliminar $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ entre as equações precedentes, em que a proposta se transformou na hypothese indicada, e as relações

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=r+s\left(\frac{dq}{dx}\right),\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)=s+t\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Obtemos d'este modo duas equações, que, eliminando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, dão a equação (1), o que prova que a supposição, que fizemos, é verdadeira.

De tudo isto resulta que os dois systemas de equações, a que se reduz a integração da equação (1), são

$$(6)\quad \begin{cases} H\left(\frac{dy}{dx}\right)-N\left(\frac{dq}{dx}\right)-K-\sqrt{G}=0, \\ H\left(\frac{dp}{dx}\right)+(K-\sqrt{G})\left(\frac{dq}{dx}\right)+M=0, \\ \left(\frac{dz}{dx}\right)=p+q\left(\frac{dy}{dx}\right); \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} H\left(\frac{dy}{dx}\right)+N\left(\frac{dq}{dx}\right)-K+\sqrt{G}=0, \\ H\left(\frac{dp}{dx}\right)+(K+\sqrt{G})\left(\frac{dq}{dx}\right)+M=0, \\ \left(\frac{dz}{dx}\right)=p+q\left(\frac{dy}{dx}\right). \end{cases}$$

Estes dois systemas de equação são ás derivadas parciaes, sendo no primeiro x e α as variaveis independentes e no segundo x e β, α e β sendo os dois argumentos do integral.

21. A integração das equações (6) e (7) reduz-se á integração de equações ás differenciaes ordinarias, em que x é a variavel independente, que coincidem com as que empregámos no methodo de Monge. Aos seus integraes devem juntar-se funcções arbitrarias de α ou β, segundo se consideram as equações (6) ou (7).

Para passar d'um integral intermedio, quando existe, para o integral primitivo, em logar de se servir das equações de Lagrange, como faz Monge, Ampère faz directamente uso d'aquelle dos systemas de equações (6) e (7) que não é empregado para achar o integral intermedio.

Seja, com effeito,

$$f(x, y, z, p, q)=\alpha, \quad F(x, y, z, p, q)=\varphi(\alpha)$$

o integral intermedio de (1), obtido por meio das equações (6).

Derivando-o e tomando x e β para variaveis independentes, resulta

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{df}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{df}{dp}\left(\frac{dp}{dx}\right)+\frac{df}{dq}\left(\frac{dq}{dx}\right)=\left(\frac{d\alpha}{dx}\right),$$

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dF}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dF}{dp}\left(\frac{dp}{dx}\right)+\frac{dF}{dq}\left(\frac{dq}{dx}\right)=\varphi'(\alpha)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right).$$

Eliminando entre estas equações, as precedentes e as equações (7) p, q, $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dq}{dx}\right)$, resulta um systema de tres equações, nas quaes não entram senão as derivadas em ordem a x de y, z e α, que se podem integrar como equações ás differenciaes ordinarias; o que leva a tres equações, onde, por ser β considerado na integração como constante, entram as quantidades β, $\psi_1(\beta)$, $\psi_2(\beta)$, sendo ψ_1 e ψ_2 duas funcções, uma das quaes é arbitraria e a outra é dada pela relação

$$\left(\frac{dz}{d\beta}\right) = q\left(\frac{dy}{d\beta}\right),$$

a que restava attender para considerar todas as equações ás derivadas parciaes, a que z tem de satisfazer.

Podemos demonstrar, como fez Ampère, que o systema das equações (7), empregado por elle para passar do integral intermedio para o primitivo, está comprehendido no systema de equações que são usadas quando se emprega o methodo de Lagrange para o mesmo fim.

Com effeito, seja

$$\varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = 0$$

o integral intermedio considerado. Para o integrar pelo methodo de Lagrange, temos de empregar as equações

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dq}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dp}p + \frac{d\varphi}{dq}q} = \frac{-dp}{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p} = \frac{-dq}{\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q},$$

das quaes a primeira, a segunda e a quarta e conjunctamente a equação (n.º 19)

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q + \frac{\mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}}\frac{d\varphi}{dp} - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{N}}\frac{d\varphi}{dq} = 0$$

dão, pela eliminação de $\frac{d\varphi}{dp}$ e de $\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q$, a primeira das equações (7); a terceira e a quarta dão, eliminando $\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q$, $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p$ e $\frac{d\varphi}{dp}$ entre ellas, a precedente e a equação (n.º 19)

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{d\varphi}{dp} + \frac{\mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{d\varphi}{dq} = 0,$$

a segunda das equações (7); e a primeira e a segunda dão a terceira das equações (7).

Ao que vimos de dizer sobre o methodo de Ampère accrescentaremos ainda que n'este methodo, no caso de haver integral intermedio, empregam-se as mesmas equações, que no de Monge, e por isso aquelle não é essencialmente differente d'este. Podemos mesmo concluir que não é mais vantajoso do que o de Monge, por causa da funcção superflua que introduz.

22. O caso de as equações (6) e (7) darem só uma combinação integravel foi estudado por Ampère pelo methodo da variação das constantes arbitrarias. Por um estudo attento d'este methodo, M. Imschenetsky chegou a um modo de transformar a equação (1), applicavel aos casos de não haver combinação integravel, de haver uma ou de haver duas. Esta transformação já a expozemos com toda a generalidade no capitulo II e vamos agora applical-a á equação (1), de que unicamente se occupou o geometra russo.

As equações do capitulo citado dão para transformada da equação (1)

$$R\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}+2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}+T\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}+U=0,$$

onde

$$R=-\left(H+N\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)\left(\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta}\right)^2-2\left(K-N\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right)\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\beta}-\left(L+N\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\left(\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\beta}\right)^2,$$

$$S=\left(H+N\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta}+\left(K-N\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right)\left(\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\beta}+\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\alpha}\right)+\left(L+N\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\alpha},$$

$$T=-\left(H+N\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)\left(\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha}\right)^2-2\left(K-N\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right)\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\alpha}-\left(L+N\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\left(\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\alpha}\right)^2,$$

$$U=N\left(\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\beta}-\frac{\partial\frac{d\omega}{dx}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\frac{d\omega}{dy}}{\partial\alpha}\right),$$

e portanto

$$R\frac{d^2\eta}{d\alpha^2}+2S\frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta}+T\frac{d^2\eta}{d\beta^2}+U_1=0. \tag{8}$$

Posto isto, suppondo

$$\alpha=f(x,\,y,\,z,\,p,\,q)$$

uma equação obtida por meio de uma combinação integravel das equações (6) ou (7) e inte-

grando-a pelo methodo da integração das equações de primeira ordem, resulta

$$z = \omega(x, y, z, \alpha, \beta, \eta),$$

em que α é um argumento do integral; logo (n.º 15-1.º) é $R = 0$ e

$$(9) \qquad 2S \frac{d^2\eta}{d\alpha\, d\beta} + T \frac{d^2\eta}{d\beta^2} + U_1 = 0.$$

Se forem

$$\alpha = f_1(x, y, z, p, q), \quad \beta = f_2(x, y, z, p, q)$$

integraes de cada um dos systemas (6) e (7), resultará, integrando as equações simultaneas precedentes,

$$z = \omega(x, y, z, \alpha, \beta, \eta).$$

Para fazer esta integração, basta substituir em $dz = pdx + qdy$ os valores de p e q, tirados das duas equações, que queremos integrar, e depois integrar de novo a resultante, que satisfaz á condição de integrabilidade, como é facil de mostrar, attendendo ás equações que resultam de substituir nas equações (4) do n.º 19 u por f_1 e v por f_2.

Por serem α e β argumentos do integral pedido, é (n.º 15-2.º) $R = 0$, $S = 0$, e portanto

$$(10) \qquad 2S \frac{d^2\eta}{d\alpha\, d\beta} + U_1 = 0.$$

Se os dois argumentos α e β forem eguaes, o que tem logar quando os systemas (6) e (7) coincidem, vem (n.º 15-3.º)

$$(11) \qquad T \frac{d^2\eta}{d\beta^2} + U_1 = 0.$$

Logo a integração da equação (1) reduz-se á das equações (8), (9), (10) ou (11), segundo o numero de integraes que tiverem as equações (6) e (7).

Póde obter-se uma infinidade de transformadas da equação (1), tendo a mesma forma que esta, suppondo que $z = \omega(x, y, z, \alpha, \beta, \eta)$ não é um integral particular da proposta.

É o que se vê, applicando a analyse exposta no capitulo II, pondo

$$F\left[x, y, \omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d\omega}{dy}, \frac{d^2\omega}{dx^2}, \frac{d^2\omega}{dx\, dy}, \frac{d^2\omega}{dy^2}\right] = W,$$

e notando que W é n'este caso differente de zero. Resulta assim a equação

$$R \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + 2 S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + W \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right] + V = 0,$$

na qual o coefficiente de W se trausforma, substituindo ω pelo seu valor, em

$$a \left[\frac{d^2 \eta}{d\alpha^2} \cdot \frac{d^2 \eta}{d\beta^2} - \left(\frac{d^2 \eta}{d\alpha\, d\beta} \right)^2 \right] + b \frac{d^2 \eta}{d\alpha^2} + c \frac{d^2 \eta}{d\alpha\, d\beta} + e \frac{d^2 \eta}{d\beta^2} + f:$$

e, como os coefficientes de R, S, T, transformados do mesmo modo, contêem na primeira potencia $\frac{d^2 \eta}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2 \eta}{d\alpha\, d\beta}$, $\frac{d^2 \eta}{d\beta^2}$, segue-se que a integração da equação (1) fica dependente da integração de outra da mesma forma, em que η é a variavel dependente e α e β são as variaveis independentes.

23. O methodo de Ampère, como este sabio notou, não se applica só á equação (1); é applicavel a muitas outras equações, como vamos mostrar.

Seja proposta a equação

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{12}$$

Tomando n'ella o argumento α para variavel independente em logar de y, para a qual transformação se devem empregar as formulas, de que usámos para o mesmo fim no n.º 20:

$$\left(\frac{dp}{dx} \right) = r + s \left(\frac{dy}{dx} \right), \quad \left(\frac{dq}{dx} \right) = s + t \left(\frac{dy}{dx} \right), \quad t = \frac{\left(\frac{dq}{d\alpha} \right)}{\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)}, \tag{13}$$

vem

$$P + Q \frac{\left(\frac{dq}{d\alpha} \right)}{\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)} + R \left[\frac{\left(\frac{dq}{d\alpha} \right)}{\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)} \right]^2 + \ldots = 0,$$

que será satisfeita pelas equações que representam o integral de (12), fazendo n'ellas tambem a mudança da variavel independente y.

Suppondo que $\left(\frac{dq}{d\alpha} \right) : \left(\frac{dy}{d\alpha} \right)$ contem uma funcção arbitraria de α, que não entre no integral nem nas suas derivadas de primeira ordem, esta funcção não entrará tambem em

P, Q, R, ...; logo será

$$(14)\qquad P=0,\quad Q=0,\quad R=0,\quad \ldots$$

Resta ver qual o modo de reconhecer quando a hypothese precedente tem logar. Para isso, eliminando entre as equações (13) e (14) $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, deverá resultar a proposta. As equações (14) não devem por isso ser distinctas, nem devem ser distinctas da equação

$$\frac{dF}{dt}-\frac{dF}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dF}{dr}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

a que $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ tem de satisfazer, como mostrámos no n.º 10, para α ser um argumento do integral.

21. Consideremos finalmente a equação

$$(15)\qquad F[Hr+2Ks+Lt+M+(rt-s^2),\ p,\ q,\ z,\ x,\ y]=0,$$

e supponhamos que não póde ser reduzida á forma (1), isto é, que não póde ser resolvida relativamente ao polynomio que n'ella entra.

Fazendo a transformação precedentemente indicada, resulta

$$(16)\qquad F\left[P+Q\frac{\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)},\ p,\ q,\ z,\ y,\ x\right]=0.$$

onde

$$P=H\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)\right]+2K\left(\frac{dq}{dx}\right)+M-N\left(\frac{dq}{dx}\right)^2,$$

$$Q=H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2K\left(\frac{dy}{dx}\right)-L+N\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)\right].$$

Desenvolvendo (16) pela serie de Taylor e egualando a zero os coefficientes das diversas potencias de $\left(\frac{dq}{d\alpha}\right):\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)$, resultam as equações

$$F(P,p,q,z,y,x)=0,\quad Q=0,$$

das quaes fica dependente a integração da equação proposta.

No caso de ser $N=0$, estas equações reduzem-se aos dois systemas seguintes:

$$
(17) \quad \left\{
\begin{aligned}
& H\left(\frac{dy}{dx}\right) - K - \sqrt{G} = 0, \\
& F\left[H\left(\frac{dp}{dx}\right) + (K - \sqrt{G})\left(\frac{dq}{dx}\right) + M, p, q, x, y, z\right] = 0, \\
& \left(\frac{dz}{dx}\right) - p - q\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(18) \quad \left\{
\begin{aligned}
& H\left(\frac{dy}{dx}\right) - K + \sqrt{G} = 0, \\
& F\left[H\left(\frac{dp}{dx}\right) + (K + \sqrt{G})\left(\frac{dq}{dx}\right) + M, p, q, x, y, z\right] = 0, \\
& \left(\frac{dz}{dx}\right) - p - q\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

sendo no primeiro systema as variaveis independentes x e α e no segundo x e β.

Para integrar estas equações é necessario, em geral, resolver a segunda de cada systema relativamente ao polynomio de que F depende, o que equivale a resolver a equação proposta relativamente a $H + 2Ks\ldots$ Ha todavia casos particulares em que esta resolução não é necessaria, e é a elles que aqui nos queremos referir.

Methodo de Laplace

25. Exporei agora o methodo de Laplace com a generalidade com que o apresentou Imschenetsky, isto é, suppondo que a equação proposta é

$$
(19) \qquad Ks + Pp + M = 0,
$$

sendo K, P, M funcções de x, y, z e q.

Pela forma d'esta equação vê-se que as funcções arbitrarias do integral contêem, uma só a variavel x, outra só a variavel y.

Tomemos para variavel dependente, em logar de z, u, sendo

$$
u = \int \mu (K\,dq + P\,dz) = f(x, y, z, q),
$$

onde μ é o factor que torna integravel a expressão $K\,dq + P\,dz$.

Derivando a ultima equação em ordem a x, vem

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dq}s = \frac{df}{dx} + (Ks + Pp)\mu,$$

ou, attendendo á proposta,

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} - \mu M = f_1(x, y, z, q).$$

Temos pois as duas equações

$$u = f(x, y, z, q), \quad \frac{du}{dx} = f_1(x, y, z, q).$$

Se z e q se poderem eliminar ao mesmo tempo entre estas duas equações, para o que deve ser

$$\frac{df}{dz} \cdot \frac{df_1}{dq} - \frac{df}{dq} \cdot \frac{df_1}{dz} = 0,$$

ou

$$P\frac{df_1}{dq} - K\frac{df_1}{dz} = 0,$$

virá uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem, em que u é a variavel dependente, cujo integral terá uma funcção arbitraria de y. Do valor de u dado por esta equação passa-se para o de z por meio da integração da equação

$$u = f(x, y, z, q).$$

Se porém esta ultima condição não tiver logar, resolvendo as equações precedentes em ordem a z e q, virá

$$z = F\left(x, y, u, \frac{du}{dx}\right), \quad q = F_1\left(x, y, u, \frac{du}{dx}\right),$$

e teremos a transformada

$$(2) \qquad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{dF}{d\frac{du}{dx}} \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy} - F_1\left(x, y, u, \frac{du}{dx}\right) = 0.$$

A condição para que esta equação tenha um integral de primeira ordem com uma funcção arbitraria de x acha-se, como fizemos no caso da equação (12), pondo

$$u_1 = \int \left(\frac{dF}{d\frac{du}{dx}} \cdot d\frac{du}{dx} + \frac{dF}{du} du \right) - F\left(x, y, u, \frac{du}{dx}\right),$$

o que dá

$$\frac{du_1}{dy} = F_1\left(x, y, u, \frac{du}{dx}\right).$$

Esta condição é pois

$$\frac{dF}{du} \cdot \frac{dF_1}{d\frac{du}{dx}} - \frac{dF}{d\frac{du}{dx}} \cdot \frac{dF_1}{du} = 0;$$

mas, pela theoria dos determinantes funccionaes, temos

$$\frac{dF}{du} \cdot \frac{dF_1}{d\frac{du}{dx}} - \frac{dF}{d\frac{du}{dx}} \cdot \frac{dF_1}{du} = \frac{1}{\frac{df}{dz} \cdot \frac{df_1}{dq} - \frac{df}{dq} \cdot \frac{df_1}{dz}};$$

logo deve ser infinito o determinante que entra no segundo membro d'esta egualdade, para (20) ter um integral de primeira ordem com uma funcção arbitraria de x.

Se porém (20) fôr tambem linear em ordem a $\frac{du}{dx}$, para o que deve ser

$$z = M\frac{du}{dx} + N, \quad q = m\frac{du}{dx} + n,$$

sendo M, N, m, n funcções de x, y e u, poderá haver um integral de primeira ordem com uma funcção arbitraria de y, o que se reconhece applicando á equação

$$(21) \qquad M\frac{d^2u}{dx\,dy} + \left(\frac{dM}{du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{dM}{dy} - m\right)\frac{du}{dx} + \frac{dN}{du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{dN}{dy} - n = 0,$$

que resulta de substituir em (20) z e $\frac{dz}{dy}$ pelos valores dados pelas relações precedentes, o raciocinio que applicámos á equação (19).

Estas transformações podem continuar-se até chegar a uma equação, que tenha um integral de primeira ordem, ou até chegar a uma equação a que se não possa applicar este methodo.

A equação de que se occupou Laplace é

$$s + Pp + Qq + Nz = M,$$

á qual é facil de applicar a theoria precedente.

CAPITULO IV

Sobre algumas equações em que as derivadas de segunda ordem entram em grau superior ao primeiro

26. Seja proposta a equação

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0, \tag{1}$$

cujo integral tem para argumentos x e y, e procuremos primeiramente a forma, que deve ter esta equação, para ter um integral intermedio com uma funcção arbitraria de y.

Seja

$$f(x, y, z, q, \psi(y), \psi'(y), \ldots) = 0 \tag{2}$$

o integral intermedio. Derivando-o em ordem a x e eliminando as funcções arbitrarias entre elle e a equação assim obtida, deve vir a proposta, para o que é necessario, em geral, que as funcções arbitrarias entrem n'um grupo $\Psi(y, \psi(y), \psi'(y), \ldots)$.

Pondo pois $\Psi[y, \psi(y), \psi'(y), \ldots] = \Psi_1(y)$ e suppondo

$$\Psi_1(y) = f_1(x, y, z, q),$$

o que dá

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dz} p + \frac{df_1}{dq} s = 0,$$

vê-se que a equação proposta deve ter a forma

$$Gs + Hp + K = 0,$$

quando (2) é do primeiro grau relativamente a Ψ_1, e que deve equivaler a varias equações d'esta forma, em numero finito ou infinito, nos outros casos. Assim, no caso de (2) ser uma equação algebrica do grau m:

$$A\Psi_1^m + B\Psi_1^{m-1} + \ldots + P = 0,$$

temos

$$\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz}p + \frac{dA}{dq}s\right)\Psi_1^m + \left(\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz}p + \frac{dB}{dq}s\right)\Psi_1^{m-1} + \ldots + \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dz}p + \frac{dP}{dq}s\right) = 0,$$

onde A, B, ..., P são funcções de x, y, z e q.

Eliminando Ψ_1 entre estas equações e representando por A', B', ..., P' os coefficientes da segunda equação, obtem-se a equação

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
A & B & C & D & \ldots\ldots & P & \ldots\ldots & \\
. & A & B & C & \ldots\ldots & . & P & \ldots \\
. & . & A & B & C \ldots & . & . & P. \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A' & B' & C' & D' & \ldots\ldots & P' & \ldots\ldots & \\
. & A' & B' & C' & \ldots\ldots & . & P' & \ldots \\
. & . & A' & B' & C' \ldots & . & . & P'. \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right| = 0,$$

que é do grau m, deve dar para s m valores da forma $H_1 p + K_1$ e equivale a m equações da forma

$$s - H_1 p - K_1 = 0.$$

27. Vamos applicar á equação (1) a doutrina exposta no n.º 16, sem a suppor resolvida, como no n.º 25, relativamente a s.

Seja dada a equação

$$F[x, y, z, p, q, s] = 0.$$

Fazendo

$$u = f(x, y, z, q), \tag{3}$$

vem

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dq}s,$$

e portanto a condição, de que fallámos no n.º 16, para s e p se eliminarem simultaneamente entre esta equação e a proposta, é

$$(4) \qquad \frac{dF}{dp} \cdot \frac{df}{dq} - \frac{dF}{ds} \cdot \frac{df}{dz} = 0.$$

Para que esta equação não contenha s nem p, é necessario que a proposta seja

$$(5) \qquad F\,[Gs + Hp + K,\ q,\ z,\ y,\ x] = 0,$$

sendo G, H, K funcções de x, y, z, q.

Se esta equação poder ser resolvida relativamente a $Gs + Hp + K$, recairemos na equação tratada por Imschenetsky, de que nos occupámos no n.º 25. Supporemos por isso agora que a equação proposta não póde ser resolvida relativamente a este trinomio.

A condição (4) reduz-se, no caso da equação (5), a

$$\frac{dF}{d\gamma}\left(H\frac{df}{dq} - G\frac{df}{dz}\right) = 0,$$

onde $\gamma = Gs + Hp + K$, equação ás derivadas parciaes de primeira ordem, que, integrada, dá

$$u = \int \mu\,(G\,dq - H\,dz) = f\,(x,\ y,\ z,\ q),$$

sendo μ o factor que torna integravel esta expressão a duas variaveis.

Temos pois

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \mu\,(Hp + Gs),$$

e, substituindo o valor de $Hp + Gs$, tirado d'esta equação, na proposta,

$$F\left[\frac{\frac{du}{dx} - \frac{df}{dx}}{\mu} + K,\ q,\ z,\ y,\ x\right] = f_1\left(x,\ y,\ z,\ q,\ \frac{du}{dx}\right) = 0.$$

Se z e q se poderem eliminar ao mesmo tempo entre as equações

$$(6) \qquad u = f\,(x,\ y,\ z,\ q), \quad f_1\left(x,\ y,\ z,\ q,\ \frac{du}{dx}\right) = 0,$$

para o que é necessaria a condição

$$(7) \qquad \frac{df}{dz} \cdot \frac{df_1}{dq} - \frac{df}{dq} \cdot \frac{df_1}{dz} = 0,$$

virá uma equação differencial ordinaria, cujo integral, que contem uma funcção arbitraria de y, dá o valor de u, que, substituido em $u = f(x, y, z, q)$, produz o integral intermedio da proposta.

Se porém a condição (7) não fôr satisfeita, eliminando z e q entre as equações (6), virá

$$\varpi_1\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, z\right) = 0, \quad \varpi_2\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, q\right) = 0,$$

d'onde se deduz

$$\frac{d\varpi_1}{dy} + \frac{d\varpi_1}{du}\frac{du}{dy} + \frac{d\varpi_1}{d\frac{du}{dx}} \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{d\varpi_1}{dz}\, q = 0.$$

Se aqui entrar ainda z, elimina-se por meio da equação $u = f(x, y, z, q)$, depois elimina-se q entre a resultante e a equação $\varpi_2\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, q\right) = 0$.

Obtem-se assim uma transformada, que, se fôr da forma

$$F_1\left[G'\frac{d^2u}{dx\,dy} + H'\frac{du}{dx} + L'\frac{du}{dy} + K', u, y, x\right] = 0,$$

póde tratar-se como a proposta, para ver se tem um integral intermedio com uma funcção arbitraria de x, ou, no caso contrario, transformar-se, como precedentemente; e póde continuar-se do mesmo modo, até chegar a uma equação, que tenha um integral intermedio, ou até chegar a uma equação, que não tenha a forma indicada.

Este processo é, por exemplo, applicavel á equação

$$F[Gs + Pp + Qq + Nz + M, x] = 0,$$

sendo G, P, Q, N, M funcções de x e y, que se reduz áquella de que tratou Laplace quando poder ser resolvida relativamente a $s + Pp + \ldots + M$.

Com effeito, neste caso temos

$$u = Gq + Pz,$$

o que dá

$$\frac{du}{dx} = Gs + Pp + \frac{dP}{dx} z + \frac{dG}{dx} q,$$

e a equação proposta reduz-se portanto á seguinte

$$F\left[\frac{du}{dx} + \left(N - \frac{dP}{dx}\right) z + \left(Q - \frac{dG}{dx}\right) q + M, x\right] = 0.$$

Suppondo agora que tem logar a condição:

$$N - \frac{dP}{dx} - PS = 0,$$

a equação anterior toma a forma

$$F\left[\frac{du}{dx} + Su + M, x\right] = 0,$$

onde

$$S = \frac{Q - \frac{dG}{dx}}{G},$$

e determina u, quando poder ser integrada sem ser resolvida relativamente ao trinomio que n'ella figura. Depois substituindo em $u = Gq + Pz$ o valor que ella dá para u, obtem-se o integral intermedio da proposta.

No caso contrario, eliminando q e z entre aquella equação e $u = Gq + Pz$, vem

$$F\left[\frac{du}{dx} + \left(N - \frac{dP}{dx} - PS\right) z + Su + M, x\right] = 0,$$

$$F\left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{P}\left(N - \frac{dP}{dx}\right) u - \frac{1}{P}\left(N - \frac{dP}{dx} - PS\right) q + M, x\right] = 0.$$

Derivando a primeira em ordem a y, eliminando z e pondo

$$A = N - \frac{dP}{dx} - PS,$$

resulta

$$\frac{d^2 u}{dx\,dy} + \frac{dA}{dy} \cdot \frac{1}{P}(u - Gq) + Aq + \frac{dS}{dy} u + S\frac{du}{dy} + \frac{dM}{dy} = 0.$$

e a segunda reduz-se portanto a

$$F\left[G_1 \frac{d^2 u}{dx\, dy} + P_1 \frac{du}{dx} + Q_1 \frac{du}{dy} + N_1 u + M_1, x\right] = 0,$$

onde

$$G_1 = -\frac{A G}{P D}, \quad P_1 = 1, \quad Q_1 = -\frac{A S}{P D}, \quad M_1 = -\frac{A}{P D} \cdot \frac{dM}{dy} + M,$$

$$N_1 = \frac{1}{P}\left(N - \frac{dP}{dx}\right) + \frac{A}{D P^2} \cdot \frac{dA}{dy} - \frac{A}{P D} \cdot \frac{dS}{dy},$$

e

$$D = \frac{G}{P} \frac{dA}{dy} - A.$$

Esta equação é da mesma forma que a proposta, e póde-se repetir sobre ella todo o raciocinio que fizemos sobre aquella.

Tudo o que vem de dizer-se a respeito da equação (5) póde extender-se á equação

$$F[Gs + Hq + K, p, z, y, x] = 0,$$

sendo G, H, K funcções de x, y, z, p.

28. O processo que vem de ser empregado para integrar em alguns casos a equação (5), póde ser applicado a um grupo mais geral de equações, como vamos mostrar.

Seja proposta a equação

$$(8) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Tomando uma nova variavel dependente u, funcção de x, y e z, ligada com a antiga variavel pela relação

$$u = f(x, y, z, p, q),$$

e derivando, vem

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} p = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} p + \frac{df}{dp} r + \frac{df}{dq} s$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} q = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} q + \frac{df}{dp} s + \frac{df}{dq} t.$$

Para que r, s e t se eliminem ao mesmo tempo entre estas equações e a proposta, deve ser (n.º 16)

$$(9) \qquad \frac{dF}{dt}\left(\frac{df}{dp}\right)^2 + \frac{dF}{dr}\left(\frac{df}{dq}\right)^2 - \frac{dF}{ds}\cdot\frac{df}{dp}\,\frac{df}{dq} = 0,$$

equação que não contem r, s e t, quando a proposta é da forma

$$(10) \qquad F\left[Hr + Ks + Lt + M, q, p, z, y, x\right] = 0,$$

sendo H, K, L, M funcções de x, y, z, p, q.

Integrando n'este caso a equação (9) e fazendo depois a eliminação indicada, resulta, para cada integral d'esta equação,

$$u = f(x, y, z, p, q), \quad f_1\left(x, y, z, u, p, q, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right).$$

Para que p e q se eliminem ao mesmo tempo entre estas equações, é necessario e sufficiente que seja satisfeita a condição

$$(11) \qquad \frac{df}{dp}\cdot\frac{df_1}{dq} - \frac{df}{dq}\cdot\frac{df_1}{dp} = 0,$$

e, neste caso, a eliminação referida dá a equação ás derivadas parciaes de primeira ordem

$$(12) \qquad \Phi\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0,$$

que, integrada, dá o valor de u, com uma funcção arbitraria, que, substituido em $u = f(x, y, z, p, q)$, leva a um integral intermedio da proposta.

29. Se a equação proposta é

$$(13) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s) = 0,$$

a equação (9) decompõe-se nas duas seguintes:

$$\frac{dF}{dr}\cdot\frac{df}{dq} - \frac{dF}{ds}\cdot\frac{df}{dp} = 0, \qquad \frac{df}{dq} = 0.$$

A primeira é applicavel quando se quer integrar a equação

$$F(Hr + Ks + M, q, p, z, y, x) = 0,$$

procedendo como no caso geral (n.º 28).

A segunda solução é mais importante, pois permitte-nos integrar um grupo de equações, que ainda não foi considerado, creio eu, por geometra algum.

Com effeito, esta solução dá

$$u = f(x, y, z, p),$$

e, derivando,

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} p + \frac{df}{dp} r$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} q + \frac{df}{dp} s.$$

Para que s e q se eliminem ao mesmo tempo entre a ultima equação e a proposta, deve ser

$$(14) \qquad \frac{dF}{ds} \cdot \frac{df}{dz} - \frac{dF}{dq} \cdot \frac{df}{dp} = 0;$$

logo a proposta deve ter a forma

$$(15) \qquad F[x, y, z, p, As + Bq + C] = 0,$$

sendo A e B funcções de x, y, z, p e C funcção de x, y, z, p e r. A e B tambem podem conter r, comtanto que entre n'um factor commum a estas duas quantidades. Vê-se pois que a equação (15) tem uma grande generalidade.

Integrando (14) e fazendo a eliminação, de que fallámos, vêem as equações

$$u = f(x, y, z, p), \quad f_1\left(x, y, z, p, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0,$$

que, pela eliminação de p e z, dão uma equação da forma $\Phi\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0$, quando tem logar a condição

$$\frac{df}{dz} \cdot \frac{df_1}{dp} - \frac{df}{dp} \cdot \frac{df_1}{dz} = 0.$$

Se esta condição não tiver logar, eliminaremos z e p entre as equações precedentes, o que dará as duas seguintes:

$$\pi_1\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, z\right), \quad \pi_2\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, p\right) = 0.$$

Derivando depois a primeira e comparando o resultado com a segunda, vem a equação

$$F_1\left|x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, H' \frac{d^2u}{dx^2} + K' \frac{d^2u}{dx\,dy} + M'\right| = 0.$$

Fica assim transformada a equação (15), que não é linear relativamente a r, n'outra em que $\frac{d^2u}{dx^2}$ entra no primeiro grau.

30. Se fôr dada a equação algebrica relativamente a r, s e t

$$(16) \qquad \Sigma A r^a s^b t^c = M,$$

onde A e M são funcções de x, y, z, p e q e a, b e c numeros inteiros positivos, poderemos achar algumas vezes o seu integral intermedio, se o houver, por um processo, dado por Boole para a integração da equação (1) do capitulo III.

Seja

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

este integral intermedio.

Derivando esta equação relativamente a x e a y, vem

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dp}r + \frac{df}{dq}s = 0,$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q + \frac{df}{dp}s + \frac{df}{dq}t = 0.$$

Eliminando duas das quantidades r, s e t entre estas equações e a proposta e egualando separadamente a 0 os coefficientes das diversas potencias da terceira, resultam equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, cujo integral commum, quando existir, representa um integral intermedio de (16).

31. Se a equação proposta fôr homogenea relativamente a p e q e relativamente a r, s e t, e os seus coefficientes forem constantes, isto é, se fôr

$$\text{(17)} \qquad \Sigma A p^a q^b r^c s^d t^e = 0,$$

$$a + b = \text{const.}, \quad c + d + e = \text{const.};$$

pondo

$$\text{(18)} \qquad z = \varphi(x + Py);$$

e determinando P por meio de

$$\text{(19)} \qquad \Sigma A P^{b+d+2e} = 0;$$

as equações (18) e (19) representarão um integral de (17).

CAPITULO V

Breves reflexões sobre a integração das equações simultaneas.

32. A theoria dos integraes de Ampère póde extender-se a a equações simultaneas com a variaveis dependentes $z_1, z_2, \ldots, z_a$. Exceptuando Combescure, que ensinou a integrar estas equações, quando são de primeira ordem, lineares relativamente ás derivadas parciaes, e com coefficientes eguaes em todas as equações, nenhum geometra, que eu saiba, se tem occupado d'ellas. Vou pois indicar as conclusões a que leva a theoria de Ampère, quando se applica a taes equações.

Se houver um numero a de equações de ordem q com a variaveis dependentes e n variaveis independentes, os seus integraes devem, para serem geraes, satisfazer á condição seguinte: sendo derivados até á ordem m relativamente a todas as variaveis independentes, deve vir um systema de equações identico ao systema formado pelas propostas e suas derivadas relativamente ás mesmas variaveis até á ordem $m-q$.

Suppondo os integraes expressos por $a+k$ equações, sendo k o numero dos seus argumentos, a differença δ entre o numero das equações dos dois systemas é dado pela formula

$$\delta = [(m+n)\,C\,n](k-a) - [(m+n-q)\,C\,n]\,a - \{[(m+n)\,C\,n](k+a)\}[(m+n-1)\,C\,(n-1) \\ + \ldots + [(m+n-q)\,C\,(n-1)]\}.$$

Deve pois, para se identificar os dois systemas, haver n'elles um numero de arbitrarias não inferior a δ.

É facil de ver que o theorema enunciado no n.º 6 tem logar aqui para as derivadas de ordem p de uma qualquer das variaveis dependentes z_i, bem como o que se demonstrou no n.º 7.

Attendendo á expressão de δ, póde mostrar-se tambem, como no n.º 8, que, para os a integraes serem geraes, devem conter, pelo menos, $a.q$ funcções arbitrarias com $n-1$ argumentos.

33. Sejam

$$(1) \qquad F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \dots\ F_i = 0,\ \dots\ F_a = 0,$$

a equações, contendo cada uma $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_a$ e suas derivadas de primeira ordem, e supponhamos que, em cada uma d'estas equações, entram as derivadas de segunda ordem de uma só das variaveis dependentes.

Derivando cada uma d'estas equações $m-2$ vezes em ordem a x_0 e tomando depois o argumento α em logar de x_0 para variavel independente, para o que se devem empregar as formulas dadas no n.º 9, resultam as a equações

$$(2) \qquad P_i + Q_i \left(\frac{\dfrac{d \dfrac{d^{m-1} z_i}{dx_0^{m-1}}}{d\alpha}}{\dfrac{dx_0}{d\alpha}} \right) = 0,$$

onde $i = 1, 2, \dots, a$.

Raciocinando agora como no n.º 9, vê-se que se póde dar a m um valor tal que estas equações se decomponham nas seguintes:

$$(3) \qquad P_i = 0, \quad Q_i = 0,$$

onde

$$Q_i = \frac{dF_i}{d\dfrac{d^2 z_i}{dy^2}} - \frac{dF_i}{d\dfrac{d^2 z_i}{dx\,dy}} \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF_i}{d\dfrac{d^2 z_i}{dx^2}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

As equações (1) só podem pois ter um systema de integraes da fórma considerada quando as equações $Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ \dots,\ Q_a = 0$ não forem distinctas, ou tiverem, pelo menos, uma solução commum.

34. Applicando estes principios ás equações

$$H \frac{d^2 z_1}{dx^2} + K \frac{d^2 z_1}{dx\,dy} + L \frac{d^2 z_1}{dy^2} + M_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H \frac{d^2 z_a}{dx^2} + K \frac{d^2 z_a}{dx\,dy} + L \frac{d^2 z_a}{dy^2} + M_a = 0,$$

sendo H, K, L, M, N funcções de x, y, z_1, z_2, ..., z_α, p_1, p_2, ..., p_α, q_1, q_2, ..., q_α, deduzem-se, seguindo o mesmo caminho que no caso de uma equação unica, as egualdades

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & H \left(\frac{dy}{dx}\right) - K \mp \sqrt{G} = 0, \\ & H \left(\frac{dp_i}{dx}\right) + (K \mp \sqrt{G}) \left(\frac{dq_i}{dx}\right) + M_i = 0, \\ & \frac{dz_i}{dx} = p_i + q_i \left(\frac{dy}{dx}\right), \end{aligned} \right.$$

em que x e α são as variaveis independentes.

Os integraes dos α grupos (4), ligados dois a dois por funcções arbitrarias, dão, para cada signal do radical, α integraes intermedios.

Este theorema é, para as equações de segunda ordem a duas variaveis, o que o de M. Combescure é para as de primeira.

NOTA

Alguns dos pontos d'esta dissertação foram objecto de trabalhos que posteriormente publicámos, os quaes se podem ver nas paginas seguintes d'este volume.

Assim, a respeito da generalisação da theoria de Ampère sobre os integraes das equações ás derivadas parciaes, dada no capitulo I, publicámos em 1878 um trabalho nas *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (2.ª serie, t. II). Da mesma generalisação occupou-se, mais tarde, Forsyth, professor na Universidade de Cambridge, em um artigo intitulado *The character of the general integral of partial differential equations*, o qual foi publicado em 1897 no volume XXVIII dos *Proceedings of the London Mathematical Society*. N'este artigo obteve este eminente geometra os mesmos resultados a que tinhamos anteriormente chegado, por methodo analogo, n'esta dissertação e no trabalho precedentemente referido, os quaes elle não conhecia n'essa occasião, como nos fez a honra de nos communicar em carta de 31 de janeiro de 1898.

Á transformação estudada no n.º 16 e ás suas applicações consagrámos tambem uma nota, publicada no volume correspondente a 1882 do *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, e á applicação da mesma transformação, considerada no n.º 29, uma outra publicada no volume correspondente a 1881 dos *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*. A doutrina d'esta ultima foi transcripta por Goursat nas suas importantes *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre* (t. II, p. 265, Paris, 1898), onde é consagrado um bello capitulo á transformação considerada no n.º 16 d'esta dissertação; e á mesma doutrina foram consagradas por Clairin algumas paginas da bella these sobre as *transformações de Baecklund*, que apresentou em 1902 á Faculdade das Sciencias de Paris, e que foi publicada como supplemento ao volume XIX da 3.ª serie dos *Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris*.

V

TRES ARTIGOS SOBRE AS EQUAÇÕES ÁS DERIVADAS PARCIAES

I

SUR LE NOMBRE DES FONCTIONS ARBITRAIRES DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles, 2.ème série, t. II. Bordeaux, 1878)

1. Ampère, dans le premier de ses beaux Mémoires sur l'intégration des équations aux dérivées partielles, a déterminé le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales de ces équations. Mais il n'a considéré que le cas où l'équation proposée n'a que deux variables indépendantes. Le but de la présente Note est de généraliser la théorie d'Ampère, c'est-à-dire de déterminer le nombre des fonctions arbitraires de l'intégrale d'une équation contenant un nombre quelconque de variables indépendantes.

2. Soit

$$F = 0 \tag{1}$$

une équation aux dérivées partielles d'ordre quelconque q, avec n variables indépendantes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

L'équation $V = 0$, qui satisfait *seulement* à l'équation (1) et à celles qui en résultent par la différentiation relative aux variables indépendantes, est une *intégrale générale*, parce qu'une telle intégrale satisfait au plus petit nombre possible de conditions. En dérivant donc $V = 0$ jusqu'à l'ordre m par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, m étant un nombre arbitraire, égal ou supérieur à q, et en dérivant la proposée jusqu'au même ordre, on doit obtenir deux systèmes d'équations identiques.

Mais, comme le premier système contient un nombre d'équations plus grand que le deuxième, il doit aussi contenir un nombre suffisant d'arbitraires pour l'identification des deux systèmes.

3. En différentiant l'équation $V=0$, on obtient les équations suivantes:

$$V=0,$$

$$\frac{dV}{dx_1}=0,\quad \frac{dV}{dx_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{dV}{dx_n}=0,$$

$$\frac{d^2V}{dx_1^2}=0,\quad \frac{d^2V}{dx_1\,dx_2}=0,\quad \frac{d^2V}{dx_1\,dx_3}=0,\quad \ldots,\quad \frac{d^2V}{dx_n^2}=0,$$

. . . .

On voit que le nombre des équations précédentes est égal à la somme des nombres de combinaisons qu'on peut former avec n lettres, prises depuis une à une jusqu'à n à n, la même lettre entrant plusieurs fois dans chaque combinaison, plus une unité; c'est-à-dire, par une formule bien connue de la théorie des combinaisons, à

$$[(m+n)\,C\,n].$$

De la même manière, on voit que le nombre des équations qui résultent de la différentiation de l'équation proposée est égal à

$$[(m+n-q)\,C\,n].$$

Donc, pour identifier les deux systèmes d'équations, il faut que celui-là contienne un nombre d'arbitraires égal à δ, en posant

$$\delta=[(m+n)\,C\,n]-[(m+n-q)\,C\,n],$$

et supérieur à δ quand l'élimination des arbitraires se fait par des groupes.

En faisant des applications successives d'un théorème bien connu de la théorie des combinaisons, on trouve

$$\delta=[(m+n-1)\,C\,(n-1)]+[(m+n-2)\,C\,(n-1)]+\ldots+[(m+n-q)\,C\,(n-1)].$$

Cette formule fait voir que δ, et par conséquent le nombre des arbitraires, doit augmenter avec m. Cette condition est satisfaite, comm'il est facile de voir, par les fonctions arbitraires d'*arguments* déterminés.

4. Considérons premièrement le cas où l'intégrale de l'équation proposée est exprimée par une équation seulement, et déterminons le nombre de *fonctions arbitraires* qu'elle contient, et le nombre d'*arguments* de chaque fonction.

THÉORÈME. — *L'intégrale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre q avec n variables indépendantes contient, en général, q fonctions arbitraires distinctes, contenant chacune n — 1 arguments, et elle ne peut jamais en contenir moins.*

Nous avons déjà fait remarquer que le système d'équations qu'on obtient en différentiant l'intégrale de (1) doit contenir un nombre de fonctions arbitraires égal ou supérieur à

$$[(m+n-1)\,C\,(n-1)] + [(m+n-2)\,C\,(n-1)] + \ldots + [(m+n-q)\,C\,(n-1)].$$

Nous allons maintenant voir combien de fonctions arbitraires doit contenir, d'après cela, l'intégrale de (1).

1.° Supposons que dans l'intégrale entrent q fonctions arbitraires, contenant chacune l arguments, que nous représenterons par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_l$. Chaque fonction arbitraire donnera, par la dérivation, les suivantes:

$$\varphi(a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_l).$$

$$\frac{d\varphi}{da_1}, \quad \frac{d\varphi}{da_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\varphi}{da_l},$$

$$\frac{d^2\varphi}{da_1^2}, \quad \frac{d^2\varphi}{da_1\,da_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\varphi}{da_l^2},$$

$$\frac{d^3\varphi}{da_1^3}, \quad \frac{d^3\varphi}{da_1^2\,da_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^3\varphi}{da_l^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par conséquent le système des équations qui résultent de la différentiation de l'intégrale contiendra un nombre de fonctions arbitraires égal à

$$q\,(m+l)\,C\,l.$$

2.° Dans l'intégrale de (1) peuvent encore entrer des fonctions arbitraires obtenues par la différentiation des précédentes par rapport aux arguments, considérés comme variables indépendantes. Considérons-en une d'ordre θ, et cherchons le nombre des fonctions arbitraires qu'elle introduit dans le système d'équations, qui ne soient pas comprises parmi celles du premier cas. Soit $\frac{d^\theta\varphi}{da_1^i\,da_2^k\ldots}$ cette fonction. Ses dérivées d'ordre inférieur à $m-\theta$ sont comprises parmi les dérivées de φ d'ordre inférieur à m, et par conséquent elles ont été déjà rapportées dans le premier cas. Il nous reste donc à chercher le nombre des dérivées de $\frac{d^\theta\varphi}{da_1^i\,da_2^k\ldots}$ dont l'ordre est compris entre $m-\theta$ et m.

Le nombre des dérivées d'ordre $m-\theta+1$ de la fonction précédente est égal au nombre de combinaisons de l lettres $m-\theta+1$ à $m-\theta+1$, la même lettre pouvant entrer plusieurs fois dans chaque combinaison, c'est-à-dire

$$[(m+l-\theta)\,C\,(l-1)].$$

On trouve de la même manière que les nombres des dérivées d'ordre $m-\theta+2, \ldots, m-2, m-1, m$ sont respectivement

$$[(m+l-\theta+1)\,C\,(l-1)], \ldots, [(m+l-2)\,C\,(l-1)], [(m+l-1)\,C\,(l-1)].$$

Donc le nombre total des fonctions arbitraires introduites dans ce second cas est

$$[(m+l-1)\,C\,(l-1)]+[(m+l-2)\,C\,(l-1)]+\ldots+[(m+l-\theta)\,C\,(l-1)].$$

3.° Si dans l'intégrale de l'équation (1) entrent des intégrales indéfinies (contenant quelques-unes des fonctions arbitraires du premier cas) prises par rapport aux arguments, considérés comme variables indépendantes, il est facile de voir que, pour trouver le nombre de fonctions arbitraires, dérivées de ces intégrales, qui ne sont pas comprises dans le premier cas, nous avons à additionner des nombres de combinaisons de lettres, dans chacune desquelles entrent $l-1$ lettres ou moins.

Considérons, en effet, l'intégrale $\int\int\int \ldots \int \varphi\, da_1^i\, da_2^k \ldots$, où φ est une des fonctions arbitraires de $a_1, a_2, \ldots$, considérées dans le premier cas. Différentiant jusqu'à l'ordre m chaqu'une des intégrales $\int \varphi\, da_1$, $\int\int \varphi\, da_1\, da_2$, $\int\int \varphi\, da_1^2, \ldots$, par rapport aux arguments dont les différentielles n'y entrent pas, nous obtiendrons des fonctions arbitraires qui n'entrent pas dans le premier cas, et dont le nombre est égal à $[(m+t)\,b\,t]$, où t est le nombre d'arguments qui sont dans ces conditions, et par conséquent moindre que l. La différentiation de ces intégrales par rapport aux arguments dont les différentielles y entrent, donne d'autres intégrales, en nombre déterminé, auxquelles on applique ce que nous venons de dire.

Dans le cas où φ n'entre pas dans l'intégrale de (1) hors du signe d'intégration, on considère son intégrale d'ordre minime comme une fonction arbitraire ψ, qu'on met dans le premier cas.

De tout ce que nous venons de dire on peut conclure qu'est condition nécessaire pour que l'intégrale de l'équation (1) soit générale

$$(3)\quad [(m+n-1)C(n-1)]+[(m+n-2)C(n-1)]+\ldots+[(m+n-q)C(n-1)] \leqq g\,[(m+l)C\,l]+g',$$

en posant

$$g' = \Sigma\,[(m+A)\,C\,(l-1)] + \Sigma'\,[(m+B)\,C\,(l-2)] + \ldots,$$

où g' représente le nombre des fonctions arbitraires introduites dans le deuxième et le troisième cas et A, B, ... des nombres entiers positifs, inférieurs à l.

Cette condition peut être écrite de la manière suivante, en ordonnant ses deux membres suivant les puissances décroissantes de m:

$$qm^{n-1}+\dots \geqq gm^{l}+\dots$$

et doit avoir lieu, quel que soit m; donc, en faisant m plus grand qu'une quantité assignable quelconque, il vient

$$l \geqq n-1, \quad g \geqq q,$$

ce que nous voulions démontrer.

Le signe d'égalité doit être employé toutes les fois que, lorsqu'on fait l'élimination des fonctions arbitraires, pour passer du système d'équations qui résulte de la différentiation de l'intégrale à celui qui résulte de la différentiation de l'équation proposée, les fonctions arbitraires ne s'éliminent pas par groupes, ou qu'il s'en élimine par groupes le moindre nombre possible pour chaque valeur de m. C'est le cas général, puisque, pour que les arbitraires s'éliminent par groupes, il faut qu'entre elles existent des rélations, et alors le nombre de ces rélations est minime.

5. Théorème. — *Le plus petit nombre de fonctions arbitraires qui doivent disparaître, quand on fait l'élimination des autres, augmente avec l'ordre de l'équation, avec l'ordre jusqu'auquel on différentie l'intégrale, et avec le nombre des variables indépendantes, et n'est zéro que dans le cas des équations de premier ordre.*

Pour démontrer cette proposition, nous devons, dans la formule (3), employer seulement le signe d'égalité, parce que nous cherchons seulement le moindre nombre d'arbitraires qui doivent disparaître quand on élimine les autres.

Quand on fait l'élimination des fonctions arbitraires, pour passer du système d'équations qui résulte de dériver l'intégrale à celui qui résulte de la différentiation de l'équation proposée, le nombre des fonctions qui doivent disparaître d'elles-mêmes doit être égal à D, en faisant

$$D = q[(m+n-1)C(n-1)] - [(m+n-1)C(n-1)] - [(m+n-2)C(n-1)] \\ - \dots - [(m+n-q)C(n-1)] + g',$$

différence qui est toujours positive, même lorsque g' est égal à 0.

En appliquant, en effet, à chacun des différences partielles dans lesquelles on peut décomposer D la formule

$$[(m+p)Cp] - [(m+p-u)Cp] = [(m+p-1)C(p-1)] + [(m+p-2)C(p-1)] \\ + \dots + [(m+p-u)C(p-1)],$$

il vient

$$D=(q-1)[(m+n-2)C(n-2)]+(q-2)[(m+n-3)C(n-2)]+(q-3)[(m+n-4)C(n-2)]$$
$$+\ldots+2[(m+n-q-1)C(n-2)]+[(m+n-q)C(n-2)]+q.$$

Cette valeur de D augmente avec q, m et n, ce que nous voulions démontrer.

6. Nous allons maintenant considérer le cas plus général où l'intégrale de l'équation (1) est exprimée par $k+1$ équations, où entrent k arguments qui ne peuvent pas être éliminés de manière à obtenir une seule équation.

Dans ce cas, il est facile de voir que le système d'équations qui résultent de la différentiation de l'intégrale, jusqu'à l'ordre m, contient un nombre d'équations égal à

$$(k+1)(m+n)Cn,$$

et comme le système qui résulte de la différentiation de (1) en contient

$$(m+n-q)Cn,$$

la différence sera

$$[(m+n)Cn](k+1)-(m+n-q)Cn=k[(m+n)Cn]+[(m+n-1)C(n-1)]+[(m+n-2)C(n-1)]$$
$$+\ldots+(m+n-q)C(n-1)=k(m+n)Cn+\delta.$$

Dans ces équations entrent les arguments et leurs dérivées, dont le nombre est égal à

$$k(m+n)Cn,$$

qu'elles doivent déterminer; par conséquent le nombre de fonctions arbitraires doit être supérieur à δ, quand les fonctions arbitraires s'éliminent par groupes, et égal à δ dans le cas contraire. Quand on fait l'élimination des arguments, quelques fonctions arbitraires peuvent disparaître, ce qui n'altère pas la conclusion précédente, parce qu'alors le nombre des fonctions arbitraires doit augmenter.

On conclut de ce qui précède, en procedant comme dans les n.os 4 et 5, que les théorèmes précédemment énoncés ont encore lieu quand $k>0$.

Le premier de ces théorèmes peut être encore énoncé de la manière suivante:

L'intégrale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre q avec n variables indépendantes doit contenir un nombre de fonctions arbitraires distinctes égal à l'ordre de l'équation avec un nombre d'arguments égal à $n-1$, quand dans l'élimination des arguments, des fonctions arbitraires et de leurs dérivées, ces fonctions ne s'éliminent par groupes, ou qu'il s'en élimine par groupes le moindre nombre possible, et jamais elle ne peut contenir moins.

II

SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

(Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. XCIII. Paris, 1881)

Le but de cette Note est de faire voir que l'équation aux dérivées partielles de deuxième ordre

$$A\frac{d^2z}{dx\,dy} + B\frac{dz}{dy} + \varphi\left(\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{dz}{dx}, z, y, x\right) = 0,$$

où A et B sont des fonctions de x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, peut être transformée dans une autre du premier degré par rapport à $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dx\,dy}$.

Soit

$$u = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right), \tag{1}$$

la fonction f étant déterminée au moyen de l'équation

$$A\frac{df}{dz} - B\frac{df}{d\frac{dz}{dx}} = 0. \tag{2}$$

En dérivant (1), on obtient

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{d\frac{dz}{dx}}\frac{d^2 z}{dx^2}, \\
\frac{du}{dy} &= \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df}{d\frac{dz}{dx}}\frac{d^2 z}{dx\,dy}.
\end{aligned}
\right.
$$

En éliminant dans l'équation proposée $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ et $\frac{d^2 z}{dx^2}$ au moyen de (3), et en remarquant que $\frac{dz}{dy}$ disparaît alors á cause de (2), ou obtient une équation de la forme suivante:

$$
\mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0.
$$

Cette équation et l'équation (1) donnent

$$
(4) \quad z = \varphi\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right),
$$

$$
\frac{dz}{dx} = \theta\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right).
$$

En dérivant la première des équations précédentes par rapport à x et en comparant le résultat avec la seconde, on trouve

$$
\theta\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{d\frac{du}{dx}}\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\frac{du}{dy}}\frac{d^2 u}{dx\,dy}.
$$

Cette équation est linéaire du deuxième ordre et donne la valeur de u, qui, substituée dans l'équation (4), mène à l'intégrale demandée.

III

SUR L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

(Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 3.me série, t. III. Bruxelles, 1882)

Je considère, dans ce travail, une transformation des équations aux dérivées partielles linéaires, du deuxième ordre, qui les ramène à autres du premier ordre, lorsque leurs intégrales intermédiaires contiennent seulement x, y et une fonction déterminée

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right),$$

qui ne varie pas avec la fonction arbitraire.

Quand cette transformation n'a pas lieu, je fais connaître une transformation qui ramène l'équation proposée à une autre du deuxième ordre, laquelle contient, comme cas particulier, la transformation de Laplace.

I

Soit proposée l'équation aux dérivées partielles, du deuxième ordre:

$$\text{(1)} \qquad F = Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

où l'on suppose

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx\, dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Cherchions les conditions pour que l'équation (1) puisse être transformée dans une autre du premier ordre au moyen de la rélation

$$\varphi(x, y) = f(x, y, z, p, q). \tag{2}$$

Cette équation donne:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dp}r + \frac{df}{dq}s = \varphi_1(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q + \frac{df}{dp}s + \frac{df}{dq}t = \varphi_2(x, y, z, p, q, r, s, t). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Premièrement on voit que, si l'on élimine deux des quantités r, s, t entre les équations (1) et (3), l'autre quantité doit disparaître.

Ensuite, éliminant une des quantités z, p, q entre l'équation résultante et l'équation (2), dont le second membre est supposé connu (nous verrons bientôt que la condition précédente le détermine), les deux autres doivent disparaître.

Quand ces conditions sont satisfaites, on arrive, en effet, à un résultat de la forme:

$$\psi\left(x, y, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right) = 0. \tag{4}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation précédente soit possible s'obtiennent donc en exprimant que trois des quantités z, p, q, r, s, t disparaissent, quand on élimine les trois autres; autrement dit, par un théorème sur les déterminants fonctionnels, bien connu:

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{dr} & \frac{dF}{ds} & \frac{dF}{dt} & \frac{dF}{dp} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & 0 & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dr} & \frac{dF}{ds} & \frac{dF}{dq} & \frac{dF}{dp} \\ 0 & 0 & \frac{df}{dq} & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & \frac{d\varphi_1}{dq} & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{d\varphi_2}{dq} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dr} & \frac{dF}{ds} & \frac{dF}{dz} & \frac{dF}{dp} \\ 0 & 0 & \frac{df}{dz} & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & \frac{d\varphi_1}{dz} & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{d\varphi_2}{dz} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de condition (5) donne:

$$\frac{df}{dp} \cdot \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} & 0 \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{df}{dq} \end{vmatrix} = 0.$$

Si $\frac{df}{dp} = 0$, on doit éliminer q au lieu de p, au moyen de l'équation (2); et l'on arrive à ce même déterminant multiplié par $\frac{df}{dq}$; mais $\frac{df}{dp}$ et $\frac{df}{dq}$ ne peuvent être nulles en même temps; donc ce déterminant est égal à zéro.

Conséquemment,

$$(8)\qquad C\left(\frac{df}{dp}\right)^2 + A\left(\frac{df}{dq}\right)^2 - B\frac{df}{dp}\cdot\frac{df}{dq} = 0;$$

ou

$$(9)\qquad \frac{df}{dp} = \Omega\frac{df}{dq}, \quad \frac{df}{dp} = \Omega'\frac{df}{dq},$$

Ω, Ω' étant les racines de l'équation

$$C\Omega^2 - B\Omega + A = 0. \tag{10}$$

Chacune des équations (9) est aux dérivées partielles linéaires, du premier ordre, avec deux variables indépendantes; par conséquent on peut toujours les intégrer. Nous avons ainsi deux ensembles de valeurs pour le second membre de la formule (2). Substituons, dans les équations de condition (6) et (7), les dérivées de la fonction f, et éliminons ensuite p ou q au moyen de (2). Si l'on obtient ainsi deux identités avec deux des formes de la fonction f, qui satisfassent à l'une ou à l'autre des équations (9), l'équation proposée a deux transformées de la forme considérée; si l'on obtient deux identités avec une seule des formes de f, l'équation proposée en a seulement une. Enfin si l'on n'obtient pas d'identités, l'équation proposée n'a pas de transformée de la forme considérée.

Le nombre de ces transformées ne peut par être supérieur à deux, parce qu'à chaque transformée correspond un intégrale intermédiaire, comme on va voir.

Quand les équations (6) et (7) sont vérifiées, l'élimination de trois des quantités z, p, q, r, s, t, entre les équations (1), (2) et (3), conduit, comme nous l'avons déjà vu, à une équation de la forme (4), qu'on intègre par la théorie des équations aux dérivées partielles, du premier ordre, avec deux variables indépendantes. Cette équation donne la fonction φ, c'est à-dire le premier nombre de (2). Nous avons ainsi une intégrale intermédiaire de l'équation proposée, avec une fonction arbitraire, introduite par (4).

Nous ferons encore les remarques suivantes:

1.° Comme l'équation proposée est du premier degré par rapport à r, s et t, l'équation (4) sera aussi du premier degré par rapport à $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, ou équivalente à un ensemble d'équations du premier degré par rapport à ces dérivées, parce que les formulas (3) sont du premier degré par rapport à toutes ces quantités.

2.° Si les équations de condition (6) et (7) sont vérifiées, nous pouvons annuler, dans les formules (1), (2) et (3), deux des quantités z, p, q, r, s et t, qui doivent disparaître quand on fait l'élimination des autres, et effectuer ensuite cette élimination, laquelle est alors simplifiée.

II

Nous avons considéré, jusqu'ici, le cas où les équations de condition (6) et (7) sont vérifiées par une des fonctions qui satisfont à une des équations (9).

Si seulement l'équation (6) est vérifiée, nous allons transformer l'équation proposée dans une autre du deuxième ordre. Nous verrons, par la suite, qu'il y a une classe étendue et importante d'équations à laquelle cette transformation est applicable.

Après avoir trouvé, par l'équation (5), le seconde membre de (2), si l'on trouve que la condition (6) est remplie, mais que l'équation (7) ne soit pas vérifiée, la variable z ne dispa-

raît pas, quand on élimine, de l'équation (1), trois des quantités r, s, t, p et q, au moyen de (2) et (3). Nous aurons donc une équation de la forme:

$$(11) \qquad f_1\left(x, y, z, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right) = 0.$$

Elle donne:

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{df_1}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{df_1}{d\dfrac{d\varphi}{dx}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{df_1}{d\dfrac{d\varphi}{dy}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0,$$

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{df_1}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} + \frac{df_1}{d\dfrac{d\varphi}{dx}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{df_1}{d\dfrac{d\varphi}{dy}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0.$$

La substitution, dans l'équation (2), des valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, données par les équations précédentes, conduit à une équation:

$$(12) \qquad f_2\left(x, y, z, \varphi, K\frac{d^2\varphi}{dx^2} + L\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + M, \quad K_1\frac{d^2\varphi}{dy^2} + L_1\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + M_1\right) = 0,$$

K, L, M, K_1, L_1, M_1 étant des fonctions de x, y, z, φ, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$.

Éliminant ensuite z, au moyen de l'équation (11), on obtient une équation aux dérivées partielles, du deuxième ordre, avec deux variables indépendantes.

Si l'on sait intégrer cette équation par un moyen quelconque, on obtient la valeur de φ; et cette valeur, substituée dans (11), conduit à l'intégrale de l'équation proposée (1).

Dans le cas contraire, si l'équation (12) est réductible à la forme (1), on lui applique de nouveau la transformation précédente, et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une équation à laquelle ne soit pas applicable la transformation précédente, ou à une équation qu'on sache intégrer.

III

Nous allons maintenant discuter l'équation (10).

1.er cas. Si $A = 0$, on aura:

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = \frac{B}{C};$$

*

et, par conséquent:

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dp} = \frac{B}{C} \cdot \frac{df}{dq};$$

donc une des formes de la fonction f ne contiendra pas p.

2.^e cas. Si $C = 0$, on aura:

$$\Omega' = \infty, \quad \Omega'' = \frac{A}{B},$$

et

$$\frac{df}{dq} = 0, \quad \frac{df}{dp} = \frac{A}{B} \cdot \frac{df}{dq};$$

par conséquent, une des formes de la fonction f ne contiendra pas q.

3.^e cas. Si, en même temps, $A = 0$ et $C = 0$, on aura:

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = \infty,$$

et

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dq} = \infty.$$

Ainsi, une des formes de la fonction f ne contiendra pas p, et l'autre ne contiendra pas q.

4.^e cas. Si, en même temps, $A = 0$ et $B = 0$, on aura:

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0;$$

puis

$$\frac{df}{dp} = 0:$$

les deux formes de f ne contiendront pas p.

5.^e cas. Si $B = 0$ et $C = 0$ on aura:

$$\Omega' = \infty, \quad \Omega'' = \infty,$$

$$\frac{df}{dq} = 0;$$

les deux formes de f ne contiendront pas q.

L'étude de ces cas particuliers est importante, parce que l'on y réduit souvent des cas plus compliqués. Nous allons donc les étudier.

I. Considérons l'équation aux dérivées partielles:

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{D} = 0,$$

où A, B, D sont des fonctions de x, y, z, p, q.

Nous avons déjà vu que, dans ce cas, l'équation (5) donne:

$$\frac{df}{dq} = 0, \quad \mathrm{A}\frac{df}{dq} = \mathrm{B}\frac{df}{dp}.$$

La deuxième équation ne conduit pas à un résultat remarquable; considérant donc seulement la première, on a

$$u = f(x, y, z, p), \tag{13}$$

en posant $\varphi(x, y) = u$. Par conséquent:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dp}r = \varphi_1(x, y, z, p, r), \\ \frac{du}{dy} &= \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q + \frac{df}{dp}s = \varphi_2(x, y, z, p, s). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

La deuxième équation de condition (6) donne:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \frac{d\mathrm{F}}{dq} & \frac{d\mathrm{F}}{dp} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp} & 0 & 0 & \frac{d\varphi_1}{dp} \\ 0 & \frac{df}{dp} & \frac{df}{dz} & \frac{d\varphi_2}{dp} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\mathrm{B}\frac{df}{dz} - \frac{d\mathrm{F}}{dq}\cdot\frac{df}{dp} = 0. \tag{15}$$

La fonction f doit donc être obtenue au moyen de l'équation précédente; et, comme cette fonction ne doit pas contenir q, l'équation proposée doit être:

$$F = Ar + Bs + Hq + G = 0,$$

A, B, H, G étant des fonctions de x, y, z, p.

L'équation (15) devient:

$$B\frac{df}{dz} - H\frac{df}{dp} = 0;$$

d'où, intégrant,

$$(16) \qquad u = f = \int \lambda (B\,dp + H\,dz),$$

λ étant le facteur qui rend intégrable $B\,dp + H\,dz$.

La troisième équation de condition (7) donne

$$(17) \qquad B\left[H\frac{d\varphi_2}{dp} - B\frac{d\varphi_2}{dz}\right] + A\left[H\frac{d\varphi_1}{dp} - B\frac{d\varphi_1}{dz}\right] - B\lambda\left[H\frac{dF}{dp} - B\frac{dF}{dz}\right] = 0.$$

Si l'élimination de quatre des quantités r, s, p, q et z, entre cette équation et les équations (14) et (16), conduit à une identité, l'équation proposée aura une intégrale intermédiaire. Nous allons chercher u dans ce cas.

On déduit de l'équation (16):

$$\frac{du}{dy} = \frac{df}{dy} + \lambda(Hq + Bs);$$

puis, en éliminant $Hq + Bs$ et r, on obtient:

$$(18) \qquad A\frac{du}{dx} + B\frac{du}{dy} + G\frac{df}{dp} - B\frac{df}{dy} - A\frac{df}{dx} - A\frac{df}{dz}p = 0.$$

Éliminant ensuite une des quantités p ou z, au moyen de l'équation (16), et observant que l'autre doit disparaître, à cause de l'équation (17), on aura une équation de la forme:

$$\varphi\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Cette équation est aux dérivées partielles, du premier ordre, avec deux variables indépendantes. Intégrée, elle donne, pour u, une valeur contenant une fonction arbitraire. En

substituant ensuite cette valeur de u dans (16), on obtiendra l'intégrale intermédiaire de l'équation proposée.

Supposons maintenant que l'équation de condition (17) ne soit pas vérifiée. Alors nous emploierons la transformation du numéro II.

Éliminant les quantités r et s, au moyen des équations

$$\frac{du}{dx} + \frac{df}{dx} = \lambda(\mathrm{H}p + \mathrm{B}r),$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{df}{dy} = \lambda(\mathrm{H}q + \mathrm{B}s),$$

et ensuite p, au moyen de l'équation (16), et observant que q alors doit disparaître, on obtient:

$$\frac{du}{dx} + \mathrm{B}'\frac{du}{dy} + \mathrm{C}' = 0,$$

B′ et C′ étant des fonctions de x, y, z, u.

Cette équation donne

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{B}'\frac{d^2u}{dx\,dy} + \left(\frac{d\mathrm{B}'}{dx} + \frac{d\mathrm{B}'}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)\frac{du}{dy} + \frac{d\mathrm{C}'}{dx} + \frac{d\mathrm{C}'}{du}\,\frac{du}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{B}'}{dz}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{d\mathrm{C}'}{dz}\right)p = 0.$$

Éliminant z et p, au moyen de l'équation (16) et de la précédente, on obtient une équation:

$$\mathrm{L}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{M}\frac{d^2u}{dx\,dy} + \mathrm{N} = 0.$$

Si l'on peut intégrer cette équation par une méthode quelconque, on obtient une valeur pour u, qui, substituée dans l'équation (16), conduit à l'intégrale demandée. Dans le cas contraire on examine si l'on peut encore lui appliquer la transformation du numéro II.

II. Si $\mathrm{A} = 0$, c'est-à-dire si l'équation proposée est:

$$\mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{D} = 0,$$

tout ce que nous avons dit, das le cas précédent, a encore lieu, avec le changement de x en y, p en q, C en A, et réciproquement.

III. Si l'on a, en même temps, $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{C} = 0$, l'équation (5) donne:

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dq} = 0.$$

On résout donc la question, ou par le cas I en y faisant $A=0$, ou par le cas II en y faisant $C=0$.

IV. Si $B=0$ et $C=0$, l'équation (8) donne:

$$\left(\frac{df}{dq}\right)^2=0;$$

donc

$$u=f(x, y, z, p);$$

et par suite:

$$\frac{du}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}p+\frac{df}{dp}r.$$

Alors l'équation proposée est

$$F=Ar+D=0.$$

Pour que q disparaisse quand on élimine r et p, au moyen des précédentes, on doit avoir:

$$\frac{df}{dp}=0.$$

Donc f ne peut contenir p; et les transformations considérées n'ont pas lieu.

On excepte le cas où l'équation proposée ne contient pas q; alors, l'équation (6) a lieu sans qu'il soit nécessaire que la fonction f ne contienne pas p. Mais, dans ce cas, l'équation proposée peut être intégrée en considérant y comme constant et remplaçant la constante arbitraire par une fonction arbitraire de y.

V. Si $B=0$ et $A=0$, on applique tout ce qu'on a vu dans le cas précédent, en changeant x en y, p en q, r en t, et réciproquement.

VI

SOBRE O EMPREGO DOS EIXOS COORDENADOS OBLIQUOS NA MECANICA ANALYTICA

(Dissertação apresentada á Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra para o concurso a um logar de lente da mesma Faculdade. Coimbra, 1876)

INTRODUCÇÃO

O principio das velocidades virtuaes póde, como é sabido, servir para resolver de um modo uniforme todas as questões de Mecanica. Isto fez Lagrange na *Mecanica Analytica*, usando, para determinar a posição dos pontos no espaço, ou das coordenadas cartesianas rectangulares, ou das coordenadas polares. Diz porém este grande geometra que na Mecanica Analytica se póde empregar qualquer systema de coordenadas para determinar a posição dos pontos no espaço.

Poinsot na sua *Nota sobre um ponto fundamental da Mecanica Analytica* mostrou que as formulas de composição de forças dadas por Lagrange não são applicaveis ao caso das coordenadas cartesianas obliquas, e apresentou as formulas que então têem logar. Foi porém mais longe este illustre geometra, pois avançou mesmo que, no methodo de resolver as questões de Mecanica pelo principio das velocidades virtuaes, não são proprias as coordenadas obliquas para determinar a posição dos pontos.

Nenhum geometra, que eu saiba, se occupou mais d'este ponto de Mecanica; não me parece porisso inutil desenvolvel-o nesta dissertação, para mostrar que a reflexão anterior de Poinsot não é exacta, e chegar por meio do principio das velocidades virtuaes a alguns resultados já obtidos por outros methodos, e a outros que julgo não terem sido ainda notados.

No capitulo I mostro primeiramente que a equação (5), que traduz o principio das velocidades virtuaes, demonstrada por Lagrange no caso dos eixos coordenados serem orthogonaes, tem logar ainda quando os eixos são obliquos. Esta extensão da formula (5) parece-me não ter sido ainda indicada, nem tambem a extensão analoga da formula (4). Procuro depois as formulas de composição das forças, quando os eixos coordenados são obliquos, a que chegou Poinsot, e termino por deduzir d'estas formulas o principio do parallelipipedo das forças.

As equações que exprimem o equilibrio do solido invariavel, quando os eixos coordenados são obliquos, foram, como se sabe, achadas por Poinsot, usando dos theoremas sobre binarios; creio porém que ninguem se occupou ainda de as deduzir do principio das velocidades virtuaes. No capitulo II faço porisso esta deducção, e chego assim ás formulas (4) e (5), que creio novas, das quaes se tiram as equações (6), a que chegou Poinsot. Esta deducção é feita por dois processos, dos quaes o segundo é fundado nas formulas (7), que são a generalização de tres formulas devidas a Euler.

No capitulo III deduzo primeiramente a equação geral da Dynamica no caso dos eixos coordenados serem obliquos, deduzo depois as equações do movimento do solido invariavel, que têem tambem logar no movimento de qualquer systema livre, e demonstro que o não entrarem nestas equações as forças de attracção reciproca dos pontos dois a dois é uma circumstancia que tem logar não sómente quando as forças são eguaes duas a duas e oppostas, mas ainda quando, sem serem eguaes, são todavia funcções das distancias dos seus pontos de applicação. Esta proposição creio não ter sido ainda notada.

Resta-me fallar de um dos pontos novos da minha dissertação, que me parece ter alguma importancia. A posição de um ponto no espaço póde determinar-se, relativamente a tres eixos coordenados obliquos, pelas projecções orthogonaes do seu raio vector sobre estes tres eixos. Este systema de coordenadas, applicado á Mecanica, conduz a muitas equações, entre as mais importantes, que têem a mesma fórma que se os eixos coordenados fossem rectangulares, abstrahindo da significação das variações. Estas equações são: a equação fundamental do equilibrio; as equações do equilibrio do solido invariavel (formulas (4) e (5) do capitulo II); as equações (7) do mesmo capitulo II; a equação fundamental da Dynamica (formula (5) do capitulo III); as equações do movimento do solido invariavel (6) e (8) do capitulo III, e as suas consequencias (10) e (11). Empregando as coordenadas de que acabámos de fallar, chega-se a resultados, em geral, mais simples que os que se obtêem empregando as cartesianas obliquas.

Coimbra, 1876.

CAPITULO I

Equilibrio dos systemas de forças

1. Sabe-se que o principio das velocidades virtuaes se traduz pela formula

$$(1) \qquad \mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots = 0,$$

sendo P, Q, R, ... as forças que actuam sobre o systema em equilibrio; p, q, r, ... as distancias dos pontos de applicação d'estas forças a outros pontos collocados na sua direcção, chamados *centros de forças;* e dp, dq, dr, ... as variações d'estas distancias, quando se dá ao systema um deslocamento infinitamente pequeno, compativel com as ligações do mesmo.

Sabe-se tambem que, para resolver qualquer questão de equilibrio por meio do principio das velocidades virtuaes, deve exprimir-se dp, dq, dr, ... em funcção das coordenadas dos diversos pontos do systema, eliminar-se na equação (1) as differenciaes das coordenadas, que se poderem eliminar por meio das equações que representam as ligações do systema, e egualar separadamente a zero os coefficientes das outras differenciaes.

As coordenadas que servem para determinar a posição dos pontos do systema, podem ser de qualquer natureza, como diz Lagrange. Na *Mecanica Analytica* emprega este grande geometra as cartesianas orthogonaes e as polares. Aqui empregaremos as cartesianas obliquas.

2. Formemos primeiramente dp, dq, dr, ... em funcção das coordenadas x, y, z, x', y', z', ... dos diversos pontos do systema.

A distancia entre o ponto (x, y, z) e o centro de força correspondente (a, b, c), quando os eixos coordenados são obliquos, é

$$(2) \qquad p^2 = \left\{ \begin{aligned} &(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos(xy) \\ &\qquad + 2(x-a)(z-c)\cos(xz) \\ &\qquad + 2(y-b)(z-c)\cos(yz), \end{aligned} \right.$$

chamando (xy), (xz), (yz) os angulos formados pelos eixos coordenados entre si.

Differenciando, vem

$$dp = \frac{1}{p}\left\{\begin{array}{l} [(x-a) + (y-b)\cos(xy) + (z-c)\cos(xz)]\,dx \\ +\,[(y-b) + (x-a)\cos(xy) + (z-c)\cos(yz)]\,dy \\ +\,[(z-c) + (x-a)\cos(xz) + (y-b)\cos(yz)]\,dz; \end{array}\right.$$

mas, designando por (px), (py) e (pz) os angulos formados pela linha p com os eixos das coordenadas, temos ([1])

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos(px) = \dfrac{x-a}{p} + \dfrac{y-b}{p}\cos(xy) + \dfrac{z-c}{p}\cos(xz), \\ \cos(py) = \dfrac{y-b}{p} + \dfrac{x-a}{p}\cos(xy) + \dfrac{z-c}{p}\cos(yz), \\ \cos(pz) = \dfrac{z-c}{p} + \dfrac{x-a}{p}\cos(xz) + \dfrac{y-b}{p}\cos(yz); \end{array}\right.$$

logo

$$(4)\qquad dp = \cos(px)\,dx + \cos(py)\,dy + \cos(pz)\,dz,$$

que é a mesma formula a que chegou Lagrange no caso de serem os eixos coordenados orthogonaes.

No caso de sobre dois pontos (x, y, z), (x', y', z') actuarem duas forças eguaes e oppostas, virá

$$(4')\qquad dp = \cos(px)(dx - dx') + \cos(py)(dy - dy') + \cos(pz)(dz - dz'),$$

sendo p a distancia dos dois pontos, e (px), (py), (pz) os angulos formados pela linha que os une com os eixos das coordenadas.

3. A condição necessaria e sufficiente para que um systema de forças esteja em equilibrio, é, em virtude do que temos dito,

$$(5)\qquad \Sigma\,\mathrm{P}\,[\cos(px)\,dx + \cos(py)\,dy + \cos(pz)\,dz] = 0,$$

onde se deve estender o signal de somma a todas as forças do systema.

---

(1) Estas formulas encontram-se na bella *Memoria* sobre varias formulas novas de Geometria Analytica, apresentada pelo nosso illustre mathematico, o sr. Daniel Augusto da Silva, á Academia das Sciencias de Lisboa, em 1872.

Exprimindo as ligações do systema por equações entre as coordenadas obliquas dos seus diversos pontos, differenciando estas equações, eliminando por meio d'ellas as differenciaes que se poderem eliminar na equação precedente, e egualando a zero os coefficientes das restantes, obtêem-se as equações que exprimem o equilibrio do systema.

Para fazer esta eliminação póde seguir-se o caminho usado por Lagrange, isto é, multiplicar as equações que exprimem as ligações por factores indeterminados, sommal-as com a equação anterior, e egualar depois a zero os coefficientes de todas as differenciaes dx, dy, dz, dx', dy', dz', etc. Parte das equações que se obtêem, servem para determinar os factores, e as restantes exprimem as condições do equilibrio do systema.

Póde-se tambem exprimir immediatamente as condições de equilibrio do systema por meio de determinantes. Com effeito, sendo $L'=0$, $L''=0$, $L'''=0$, ..., $L^{(n)}=0$ as equações que representam as ligações do systema, teremos

$$\frac{dL'}{dx}dx+\frac{dL'}{dy}dy+\frac{dL'}{dz}dz+\frac{dL'}{dx'}dx'+\ldots=0,$$

$$\frac{dL''}{dx}dx+\frac{dL''}{dy}dy+\frac{dL''}{dz}dz+\frac{dL''}{dx'}dx'+\ldots=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dL^{(n)}}{dx}dx+\frac{dL^{(n)}}{dy}dy+\frac{dL^{(n)}}{dz}dz+\frac{dL^{(n)}}{dx'}dx'+\ldots=0.$$

Por meio d'estas equações devem eliminar-se em (5) n differenciaes das variaveis x, y, z, x', y', z', etc. e egualar a zero os coefficientes das restantes, o que dá o systema de determinantes:

$$\left|\begin{matrix} P\cos(px), & P\cos(py), & P\cos(pz), & P'\cos(p'x), & \ldots \\ \frac{dL'}{dx}, & \frac{dL'}{dy}, & \frac{dL'}{dz}, & \frac{dL'}{dx'}, & \ldots \\ \frac{dL''}{dx}, & \frac{dL''}{dy}, & \frac{dL''}{dz}, & \frac{dL''}{dx'}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dL^{(n)}}{dx}, & \frac{dL^{(n)}}{dy}, & \frac{dL^{(n)}}{dz}, & \frac{dL^{(n)}}{dx'}, & \ldots \end{matrix}\right| = 0.$$

Cumpre notar que, sendo m o numero de pontos do systema, haverá em cada columna horisontal do symbolo precedente $3m$ termos, e em cada columna vertical $n+1$. Com cada $n+1$ columnas verticaes póde formar-se uma determinante, e temos assim $3m-n$ determinantes distinctos, cada um dos quaes deve ser separadamente egual a zero, e que dão assim as condições de equilibrio do systema proposto.

4. Sejam P, Q, R, etc. forças que actuem sobre um ponto, e X, Y, Z tres forças dirigidas segundo os eixos coordenados e capazes de substituir as primeiras. Este systema estará em equilibrio com o opposto áquelle; logo

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta,$$

representando por $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ as variações das distancias (ξ, η, ζ) do ponto de applicação das forças X, Y, Z aos centros das mesmas, quando se dá ao ponto um deslocamento infinitamente pequeno.

Reciprocamente, se a condição anterior tiver logar, podem as forças X, Y, Z substituir P, Q, R, etc.

Para determinar n'este caso X, Y, Z, notemos que, em virtude da formula (4), temos,

$$\begin{aligned} d\xi &= dx + dy.\cos(xy) + dz.\cos(xz), \\ d\eta &= dy + dx.\cos(yx) + dz.\cos(yz), \\ d\zeta &= dz + dx.\cos(zx) + dy.\cos(zy); \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \Sigma P\,[\cos(px).dx + \cos(py).dy + \cos(pz).dz] = {} & X\,[dx + dy.\cos(xy) + dz.\cos(xz)] \\ & + Y\,[dy + dx.\cos(yx) + dz.\cos(yz)] \\ & + Z\,[dz + dx.\cos(xz) + dy.\cos(yz)], \end{aligned}$$

d'onde se deduz

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma P \cos(px) &= X + Y\cos(yx) + Z\cos(zx), \\ \Sigma P \cos(py) &= X\cos(xy) + Y + X\cos(zy), \\ \Sigma P \cos(pz) &= X\cos(xz) + Y\cos(yz) + Z, \end{aligned} \right.$$

e portanto

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} X = \Sigma \frac{P}{D} \Big\{ & \cos(px)\Big(1 - \cos^2(zy)\Big) + \cos(py)\Big(\cos(zx)\cos(zy) - \cos(xy)\Big) \\ & + \cos(pz)\Big(\cos(xy)\cos(zy) - \cos(zx)\Big)\Big\}, \\ Y = \Sigma \frac{P}{D} \Big\{ & \cos(py)\Big(1 - \cos^2(xz)\Big) + \cos(pz)\Big(\cos(xy)\cos(xz) - \cos(yz)\Big) \\ & + \cos(px)\Big(\cos(xz)\cos(yz) - \cos(xy)\Big)\Big\}, \\ Z = \Sigma \frac{P}{D} \Big\{ & \cos(pz)\Big(1 - \cos^2(xy)\Big) + \cos(py)\Big(\cos(xy)\cos(xz) - \cos(yz)\Big) \\ & + \cos(px)\Big(\cos(xy)\cos(yz) - \cos(xz)\Big)\Big\}, \end{aligned} \right.$$

onde

$$D = 1 - \cos^2(xy) - \cos^2(xz) - \cos^2(yz) + 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz).$$

Estas formulas são aquellas a que chegou Poinsot em uma nota que vem no fim da *Mecanica Analytica* de Lagrange (3.ª ed.).

Comparando as formulas (6), quando ha só uma força P, com as formulas (3), conclue-se que X, Y, Z são as componentes segundo os tres eixos de uma linha P, cujas projecções orthogonaes sobre os eixos das coordenadas são

$$P\cos(px), \quad P\cos(py), \quad P\cos(pz),$$

e esta linha é porisso a diagonal do parallelipipedo, cujos lados são eguaes a X, Y, Z e dirigidos segundo os eixos.

É o principio do parallelipipedo das forças, que se acha assim deduzido do das velocidades virtuaes de um modo novo, que me parece muito simples e directo.

5. Um ponto (x, y, z) póde tambem ser determinado pelas suas tres projecções orthogonaes sobre tres eixos obliquos e as forças pelas suas projecções orthogonaes sobre os mesmos eixos. Representaremos as novas coordenadas assim definidas por (x_1, y_1, z_1) e as projecções orthogonaes da força P sobre os tres eixos por X_1, Y_1 e Z_1.

A formula (5) póde pois escrever-se do modo seguinte:

$$\Sigma[X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz] = 0, \tag{8}$$

e empregar-se debaixo d'esta forma quando os coefficientes de dx, dy, dz, etc. nas equações que traduzem as ligações do systema vierem expressos em funcção das coordenadas x_1, x_1, x_1, etc.; como acontece, por exemplo, quando a condição a satisfazer é a invariabilidade da distancia entre dois pontos (x_1, y_1, z_1), (x'_1, y'_1, z'_1), pois que, neste caso, a formula (4′) dá

$$(x'_1 - x_1)(dx - dx') + (y'_1 - y_1)(dy - dy') + (z'_1 - z_1)(dz - dz') = 0.$$

O que vem de dizer-se tem uma applicação no caso do solido invariavel, pois mostra já que as equações do seu equilibrio, no caso dos eixos serem obliquos, derivam das que têem logar no caso dos eixos orthogonaes pela mudança de x, y, z, etc., X, Y, Z, etc. em x_1, y_1, z_1, etc., X_1, Y_1, Z_1, etc., com tanto que as projecções dos pontos e das forças sobre os eixos obliquos sejam feitas orthogonalmente.

A equação (8), que exprime o equilibrio de um systema qualquer, tem a mesma forma que no caso dos eixos coordenados serem orthogonaes, e deve empregar-se quando, differen-

ciando as equações que exprimem as ligações e substituindo as coordenadas que entram nos coefficientes das differenciaes das mesmas por outras obtidas por projecções orthogonaes sobre os eixos, e eliminando na equação de equilibrio as differenciaes que se poderem eliminar, se chegar a resultados mais simples do que empregando, para determinar os pontos e as forças, as suas projecções por meio de planos parallelos aos planos das coordenadas.

As formulas para esta transformação obtêem-se facilmente por meio dos theoremas da theoria das projecções, e são

$$x_1 = x + y \cos(xy) + z \cos(xz),$$

$$y_1 = y + x \cos(xy) + z \cos(yz),$$

$$z_1 = z + x \cos(xz) + y \cos(yz).$$

CAPITULO II

Sobre o equilibrio dos solidos

6. *Equilibrio de um ponto que só póde mover-se sobre uma superficie dada.*

Seja

$$L' = f(x, y, z) = 0$$

a equação da superficie dada.

As condições do equilibrio do ponto serão (n.º 3)

$$\begin{Vmatrix} \Sigma P \cos(px), & \Sigma P \cos(py), & \Sigma P \cos(pz) \\ \frac{dL'}{dx}, & \frac{dL'}{dy}, & \frac{dL'}{dz} \end{Vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma P \cos(px), & \Sigma P \cos(py) \\ \frac{dL'}{dx}, & \frac{dL'}{dy} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \Sigma P \cos(px), & \Sigma P \cos(pz) \\ \frac{dL'}{dx}, & \frac{dL'}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

7. *Equilibrio de um ponto que só póde mover-se sobre uma curva dada.*

Sejam

$$L' = f_1(x, y, z) = 0, \quad L'' = f_2(x, y, z) = 0$$

as equações das superficies que determinam pela sua intersecção a curva dada. A condição

do equilibrio do ponto será (n.° 3)

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \Sigma P\cos(px), & \Sigma P\cos(py), & \Sigma P\cos(pz) \\ \frac{dL'}{dx}, & \frac{dL'}{dy}, & \frac{dL'}{dz} \\ \frac{dL''}{dx}, & \frac{dL''}{dy}, & \frac{dL''}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

8. *Equilibrio do solido invariavel.*

Procuremos agora as condições de equilibrio de um solido invariavel, suppondo-o referido a tres eixos coordenados obliquos.

Suppondo estas condições conhecidas para o caso particular de os eixos das coordenadas serem orthogonaes, podia-se passar immediatamente para as que são relativas aos eixos obli quos pelo meio indicado no n.° 5. Vamos todavia deduzil-as aqui directamente, sem as suppor previamente demonstradas para o caso particular mencionado.

Sejam $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, etc. as forças applicadas aos diversos pontos $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$, $(x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)})$, etc. do solido. Virá (n.° 3)

$$(3) \qquad \Sigma P\left[\cos(px)\,dx + \cos(py)\,dy + \cos(pz)\,dz\right] = 0,$$

em que o sommatorio Σ se deve extender a todos os pontos a que estão applicadas forças, e onde se devem eliminar todas as differenciaes que se podérem eliminar por meio das equações que exprimem as ligações d'estes pontos.

Estas equações exprimem a invariabilidade da distancia entre dois pontos quaesquer e são da forma:

$$\left.\begin{aligned} (x^{(n)} - x^{(p)})^2 + (y^{(n)} - y^{(p)})^2 + (z^{(n)} - z^{(p)})^2 + 2\,(x^{(n)} - x^{(p)})\,(y^{(n)} - y^{(p)}) \cos(xy) \\ + 2\,(x^{(n)} - x^{(p)})\,(z^{(n)} - z^{(p)}) \cos(xz) \\ + 2\,(y^{(n)} - y^{(p)})\,(z^{(n)} - z^{(p)}) \cos(yz) \end{aligned}\right\} = \text{const.}$$

Se considerarmos tres pontos $(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, z^{(\alpha)})$, $(x^{(\beta)}, y^{(\beta)}, z^{(\beta)})$, $(x^{(\gamma)}, y^{(\gamma)}, z^{(\gamma)})$ do solido, que não estejam em linha recta, para exprimir a solidez basta exprimir a invariabilidade das distancias entre estes pontos dois a dois e a invariabilidade das distancias de todos os outros pontos a estes tres. Deve pois na formula precedente dar-se a n os tres valores α, β, γ e a p os valores correspondentes a todos os outros pontos do solido, dando além d'isso a p os valores β e γ quando a n se der o valor α, e a p o valor γ quando a n se der o valor β. Formam-se assim todas as equações distinctas que exprimem a solidez do corpo.

Temos pois a differenciar estas equações e a eliminar entre as resultantes e (3) as differenciaes das coordenadas dos pontos considerados, que se podérem eliminar. Para isso, multiplicaremos primeiro as equações differenciaes obtidas por factores indeterminados λ, juntaremos

os productos a (3) e egualaremos a zero os coefficientes de todas aquellas differenciaes. É o que vamos fazer.

Temos primeiramente

$$\Sigma\, \mathrm{P}\left[\cos(px)\, dx + \cos(py)\, dy + \cos(pz)\, dz\right]$$
$$+ \Sigma' \lambda^{(n)}_{(p)} \Big[\left(x^{(n)} - x^{(p)}\right)\left(dx^{(n)} - dx^{(p)}\right) + \left(y^{(n)} - y^{(p)}\right)\left(dy^{(n)} - dy^{(p)}\right) + \left(z^{(n)} - z^{(p)}\right)\left(dz^{(n)} - dz^{(p)}\right)$$
$$+ \left(y^{(n)} - y^{(p)}\right)\left(dx^{(n)} - dx^{(p)}\right)\cos(xy) + \left(x^{(n)} - x^{(p)}\right)\left(dy^{(n)} - dy^{(p)}\right)\cos(xy)$$
$$+ \left(z^{(n)} - z^{(p)}\right)\left(dx^{(n)} - dx^{(p)}\right)\cos(xz) + \left(x^{(n)} - x^{(p)}\right)\left(dz^{(n)} - dz^{(p)}\right)\cos(xz)$$
$$+ \left(y^{(n)} - y^{(p)}\right)\left(dz^{(n)} - dz^{(p)}\right)\cos(yz) + \left(z^{(n)} - z^{(p)}\right)\left(dy^{(n)} - dy^{(p)}\right)\cos(yz)\Big] = 0,$$

extendendo o sommatorio Σ' a todas as equações de condição.

Esta equação póde escrever-se (capitulo I, formula 3) do modo seguinte:

$$\Sigma\, \mathrm{P}\left[\cos(px)\, dx + \cos(py)\, dy + \cos(pz)\, dz\right]$$
$$+ \Sigma'' \lambda^{(n)}_{(p)}\left[\cos\left(r^{(n)}_{p} x\right)\left(dx^{(n)} - dx^{(p)}\right) + \cos\left(r^{(n)}_{p} y\right)\left(dy^{(n)} - dy^{(p)}\right) + \cos\left(r^{(n)}_{p} z\right)\left(dz^{(n)} - dz^{(p)}\right)\right]$$
$$+ \lambda^{(\alpha)}_{\beta}\left[\cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} x\right)\left(dx^{(\alpha)} - dx^{(\beta)}\right) + \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} y\right)\left(dy^{(\alpha)} - dy^{(\beta)}\right) + \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} z\right)\left(dz^{(\alpha)} - dz^{(\beta)}\right)\right]$$
$$+ \lambda^{(\alpha)}_{\gamma}\left[\cos\left(r^{(\alpha)}_{\gamma} x\right)\left(dx^{(\alpha)} - dx^{(\gamma)}\right) + \cos\left(r^{(\alpha)}_{\gamma} y\right)\left(dy^{(\alpha)} - dy^{(\gamma)}\right) + \cos\left(r^{(\alpha)}_{\gamma} z\right)\left(dz^{(\alpha)} - dz^{(\gamma)}\right)\right]$$
$$+ \lambda^{(\beta)}_{\gamma}\left[\cos\left(r^{(\beta)}_{\gamma} x\right)\left(dx^{(\beta)} - dx^{(\gamma)}\right) + \cos\left(r^{(\beta)}_{\gamma} y\right)\left(dy^{(\beta)} - dy^{(\gamma)}\right) + \cos\left(r^{(\beta)}_{\gamma} z\right)\left(dz^{(\beta)} - dz^{(\gamma)}\right)\right] = 0,$$

representando por $r^{(n)}_{p}$ a recta que une o ponto $\left(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right)$ ao ponto $\left(x^{(p)}, y^{(p)}, z^{(p)}\right)$, e extendendo o sommatorio Σ'' aos tres valores de n e a todos os valores de p, excluindo α, β, γ.

Egualando depois a zero os coefficientes de todas as differenciaes, que entram na equação precedente, resultam as equações seguintes:

(A) $\quad \mathrm{P}^{(\alpha)} \cos\left(p^{(\alpha)} x\right) + \Sigma'' \lambda^{(\alpha)}_{p} \cos\left(r^{(\alpha)}_{p} x\right) + \lambda^{(\alpha)}_{\beta} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} x\right) + \lambda^{(\alpha)}_{\gamma} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\gamma} x\right) = 0,$

(A′) $\quad \mathrm{P}^{(\alpha)} \cos\left(p^{(\alpha)} y\right) + \Sigma'' \lambda^{(\alpha)}_{p} \cos\left(r^{(\alpha)}_{p} y\right) + \lambda^{(\alpha)}_{\beta} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} y\right) + \lambda^{(\alpha)}_{\gamma} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\gamma} y\right) = 0,$

(A″) $\quad \mathrm{P}^{(\alpha)} \cos\left(p^{(\alpha)} z\right) + \Sigma'' \lambda^{(\alpha)}_{p} \cos\left(r^{(\alpha)}_{p} z\right) + \lambda^{(\alpha)}_{\beta} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} z\right) + \lambda^{(\alpha)}_{\gamma} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\gamma} z\right) = 0,$

(B) $\quad \mathrm{P}^{(\beta)} \cos\left(p^{(\beta)} x\right) + \Sigma'' \lambda^{(\beta)}_{p} \cos\left(r^{(\beta)}_{p} x\right) - \lambda^{(\alpha)}_{\beta} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} x\right) + \lambda^{(\beta)}_{\gamma} \cos\left(r^{(\beta)}_{\gamma} x\right) = 0,$

(B′) $\quad \mathrm{P}^{(\beta)} \cos\left(p^{(\beta)} y\right) + \Sigma'' \lambda^{(\beta)}_{p} \cos\left(r^{(\beta)}_{p} y\right) - \lambda^{(\alpha)}_{\beta} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} y\right) + \lambda^{(\beta)}_{\gamma} \cos\left(r^{(\beta)}_{\gamma} y\right) = 0,$

(B″) $\quad \mathrm{P}^{(\beta)} \cos\left(p^{(\beta)} z\right) + \Sigma'' \lambda^{(\beta)}_{p} \cos\left(r^{(\beta)}_{p} z\right) - \lambda^{(\alpha)}_{\beta} \cos\left(r^{(\alpha)}_{\beta} z\right) + \lambda^{(\beta)}_{\gamma} \cos\left(r^{(\beta)}_{\gamma} z\right) = 0,$

$$(C)\qquad P^{(\gamma)}\cos\left(p^{(\gamma)}x\right)+\Sigma''\lambda_p^{(\gamma)}\cos\left(r_p^{(\gamma)}x\right)-\lambda_\gamma^{(\beta)}\cos\left(r_\gamma^{(\beta)}x\right)-\lambda_\gamma^{(\alpha)}\cos\left(r_\gamma^{(\alpha)}x\right)=0,$$

$$(C')\qquad P^{(\gamma)}\cos\left(p^{(\gamma)}y\right)+\Sigma''\lambda_p^{(\gamma)}\cos\left(r_p^{(\gamma)}y\right)-\lambda_\gamma^{(\beta)}\cos\left(r_\gamma^{(\beta)}y\right)-\lambda_\gamma^{(\alpha)}\cos\left(r_\gamma^{(\alpha)}y\right)=0,$$

$$(C'')\qquad P^{(\gamma)}\cos\left(p^{(\gamma)}z\right)+\Sigma''\lambda_p^{(\gamma)}\cos\left(r_p^{(\gamma)}z\right)-\lambda_\gamma^{(\beta)}\cos\left(r_\gamma^{(\beta)}z\right)-\lambda_\gamma^{(\alpha)}\cos\left(r_\gamma^{(\alpha)}z\right)=0,$$

extendendo o sommatorio Σ'' a todos os valores de p.

Além d'estas vêem as equações seguintes:

$$(D)\qquad P^{(p)}\cos\left(p^{(p)}x\right)-\lambda_p^{(\alpha)}\cos\left(r_p^{(\alpha)}x\right)-\lambda_p^{(\beta)}\cos\left(r_p^{(\beta)}x\right)-\lambda_p^{(\gamma)}\cos\left(r_p^{(\gamma)}x\right)=0,$$

$$(D')\qquad P^{(p)}\cos\left(p^{(p)}y\right)-\lambda_p^{(\alpha)}\cos\left(r_p^{(\alpha)}y\right)-\lambda_p^{(\beta)}\cos\left(r_p^{(\beta)}y\right)-\lambda_p^{(\gamma)}\cos\left(r_p^{(\gamma)}y\right)=0,$$

$$(D'')\qquad P^{(p)}\cos\left(p^{(p)}z\right)-\lambda_p^{(\alpha)}\cos\left(r_p^{(\alpha)}z\right)-\lambda_p^{(\beta)}\cos\left(r_p^{(\beta)}z\right)-\lambda_p^{(\gamma)}\cos\left(r_p^{(\gamma)}z\right)=0.$$

Estas equações são tantas quantos os valores que se podem dar a p, excluindo α, β, γ.

Somando as equações (A), (B), (C) e (D), resulta

$$\Sigma\, P\cos(px)=0.$$

Do mesmo modo se obtêem as esquações

$$\Sigma\, P\cos(py)=0,\quad \Sigma\, P\cos(pz)=0,$$

onde se deve entender o sommatorio Σ a todos os pontos do solido. Temos achado pois tres das condições necessarias para o solido estar em equilibrio.

Como na equação (3) ha tres vezes tantas differenciaes quantos os pontos do solido, e como as equações de condição distinctas, a que estas differenciaes têem de satisfazer, são tres vezes tantas quantos os pontos do solido, menos seis, segue-se que o equilibrio é expresso por seis equações; resta pois formar ainda tres. É o que vamos fazer.

Nas equações (A), (A'), (A''), (B), ..., (D'') ponhamos

$$\cos\left(r_p^{(n)}x\right)=\frac{r^{(n)}\cos\left(r^{(n)}x\right)-r^{(p)}\cos\left(r^{(p)}x\right)}{r_p^{(n)}},$$

$$\cos\left(r_p^{(n)}y\right)=\frac{r^{(n)}\cos\left(r^{(n)}y\right)-r^{(p)}\cos\left(r^{(p)}y\right)}{r_p^{(n)}},$$

$$\cos\left(r_p^{(n)}z\right)=\frac{r^{(n)}\cos\left(r^{(n)}z\right)-r^{(p)}\cos\left(r^{(p)}z\right)}{r_p^{(n)}},$$

representando por $r^{(n)}$, $r^{(p)}$, etc. as distancias dos pontos $(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$, $(x^{(p)}, y^{(p)}, z^{(p)})$, etc. á origem das coordenadas.

Multipliquemos depois (A) por $r^{(\alpha)} \cos\left(r^{(\alpha)} y\right)$ e subtraiamos do resultado a equação (A′), multiplicada por $r^{(\alpha)} \cos\left(r^{(\alpha)} x\right)$; virá

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}^{(\alpha)} r^{(\alpha)} \left[\cos\left(p^{(\alpha)} x\right) \cos\left(r^{(\alpha)} y\right) - \cos\left(p^{(\alpha)} y\right) \cos\left(r^{(\alpha)} x\right)\right] \\
+ \Sigma'' \lambda_p^{(\alpha)} & \frac{r^{(\alpha)} r^{(p)} \left[\cos\left(r^{(p)} y\right) \cos\left(r^{(\alpha)} x\right) - \cos\left(r^{(\alpha)} y\right) \cos\left(r^{(p)} x\right)\right]}{r_p^{(\alpha)}} \\
+ \lambda_\beta^{(\alpha)} & \frac{r^{(\alpha)} r^{(\beta)} \left[\cos\left(r^{(\beta)} y\right) \cos\left(r^{(\alpha)} x\right) - \cos\left(r^{(\alpha)} y\right) \cos\left(r^{(\beta)} x\right)\right]}{r_\beta^{(\alpha)}} \\
+ \lambda_\gamma^{(\alpha)} & \frac{r^{(\alpha)} r^{(\gamma)} \left[\cos\left(r^{(\gamma)} y\right) \cos\left(r^{(\alpha)} x\right) - \cos\left(r^{(\gamma)} x\right) \cos\left(r^{(\alpha)} y\right)\right]}{r_\gamma^{(\alpha)}} = 0.
\end{aligned}
$$

As equações (B) e (B′), (C) e (C′) dão do mesmo modo as duas seguintes:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}^{(\beta)} r^{(\beta)} \left[\cos\left(p^{(\beta)} x\right) \cos\left(r^{(\beta)} y\right) - \cos\left(p^{(\beta)} y\right) \cos\left(r^{(\beta)} x\right)\right] \\
+ \Sigma'' \lambda_p^{(\beta)} & \frac{r^{(p)} r^{(\beta)} \left[\cos\left(r^{(p)} y\right) \cos\left(r^{(\beta)} x\right) - \cos\left(r^{(\beta)} y\right) \cos\left(r^{(p)} x\right)\right]}{r_p^{(\beta)}} \\
+ \lambda_\beta^{(\alpha)} & \frac{r^{(\alpha)} r^{(\beta)} \left[\cos\left(r^{(\alpha)} y\right) \cos\left(r^{(\beta)} x\right) - \cos\left(r^{(\beta)} y\right) \cos\left(r^{(\alpha)} x\right)\right]}{r_\beta^{(\alpha)}} \\
+ \lambda_\gamma^{(\beta)} & \frac{r^{(\beta)} r^{(\gamma)} \left[\cos\left(r^{(\gamma)} y\right) \cos\left(r^{(\beta)} x\right) - \cos\left(r^{(\gamma)} x\right) \cos\left(r^{(\beta)} y\right)\right]}{r_\gamma^{(\beta)}} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}^{(\gamma)} r^{(\gamma)} \left[\cos\left(p^{(\gamma)} x\right) \cos\left(r^{(\gamma)} y\right) - \cos\left(p^{(\gamma)} y\right) \cos\left(r^{(\gamma)} x\right)\right] \\
+ \Sigma'' \lambda_p^{(\gamma)} & \frac{r^{(\gamma)} r^{(p)} \left[\cos\left(r^{(\gamma)} x\right) \cos\left(r^{(p)} y\right) - \cos\left(r^{(\gamma)} y\right) \cos\left(r^{(p)} x\right)\right]}{r_p^{(\gamma)}} \\
+ \lambda_\gamma^{(\beta)} & \frac{r^{(\beta)} r^{(\gamma)} \left[\cos\left(r^{(\beta)} y\right) \cos\left(r^{(\gamma)} x\right) - \cos\left(r^{(\gamma)} y\right) \cos\left(r^{(\beta)} x\right)\right]}{r_\gamma^{(\beta)}} \\
+ \lambda_\gamma^{(\alpha)} & \frac{r^{(\alpha)} r^{(\gamma)} \left[\cos\left(r^{(\alpha)} y\right) \cos\left(r^{(\gamma)} x\right) - \cos\left(r^{(\gamma)} y\right) \cos\left(r^{(\alpha)} x\right)\right]}{r_\gamma^{(\alpha)}} = 0.
\end{aligned}
$$

As equações (D) e (D′) dão, tratando-as como as precedentes e sommando todas as equações correspondentes aos diversos valores de p,

$$\begin{aligned}
&\Sigma'' \mathrm{P}^{(p)} r^{(p)} \left[\cos(p^{(p)}x)\cos(r^{(p)}y) - \cos(r^{(p)}x)\cos(p^{(p)}y)\right] \\
&+ \Sigma'' \lambda_p^{(\alpha)} \frac{r^{(\alpha)} r^{(p)} \left[\cos(r^{(\alpha)}y)\cos(r^{(p)}x) - \cos(r^{(p)}y)\cos(r^{(\alpha)}x)\right]}{r_p^{(\alpha)}} \\
&+ \Sigma'' \lambda_p^{(\beta)} \frac{r^{(\beta)} r^{(p)} \left[\cos(r^{(\beta)}y)\cos(r^{(p)}x) - \cos(r^{(p)}y)\cos(r^{(\beta)}x)\right]}{r_p^{(\beta)}} \\
&+ \Sigma'' \lambda_p^{(\gamma)} \frac{r^{(\gamma)} r^{(p)} \left[\cos(r^{(\gamma)}y)\cos(r^{(p)}x) - \cos(r^{(p)}y)\cos(r^{(\gamma)}x)\right]}{r_p^{(\gamma)}} = 0.
\end{aligned}$$

Sommando as quatro equações precedentes, resulta

$$\Sigma \mathrm{P} r \left[\cos(px)\cos(ry) - \cos(py)\cos(rx)\right] = 0,$$

em que o sommatorio se deve estender a todos os pontos a que estão applicadas forças.

As equações (A), (A″), (B), (B″), (C), (C″), (D), (D″) dão outra equação, que se deduz da precedente mudando y em z. As equações (A′), (A″), (B′), (B″), (C′), (C″), (D′), (D″) dão outra, que se deduz da anterior mudando x em y e y em z.

Temos pois para o equilibrio do solido invariavel, quando os eixos coordenados são obliquos, as seis equações seguintes:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Sigma \mathrm{P} \cos(px) = 0, \\ \Sigma \mathrm{P} \cos(py) = 0, \\ \Sigma \mathrm{P} \cos(pz) = 0, \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \Sigma \mathrm{P} r \left[\cos(px)\cos(ry) - \cos(py)\cos(rx)\right] = 0, \\ \Sigma \mathrm{P} r \left[\cos(px)\cos(rz) - \cos(pz)\cos(rx)\right] = 0, \\ \Sigma \mathrm{P} r \left[\cos(py)\cos(rz) - \cos(pz)\cos(ry)\right] = 0. \end{cases}$$

Estas tres ultimas equações dão o theorema seguinte:

Se considerarmos duas rectas quaesquer, que se cortem, e se projectarmos sobre ellas as forças que actuam sobre o solido e os raios vectores de seus pontos de applicação, multiplicando a projecção de cada força sobre uma das rectas pela projecção sobre a outra do raio vector correspondente, tomando as projecções da força sobre uma das rectas com signal contrario ao da projecção da mesma força sobre a outra, e sommando todos estes productos, virá um resultado egual a zero, se o solido estiver em equilibrio.

Se o corpo tiver um ponto fixo, é facil de ver que as equações do equilibrio se reduzem ás tres ultimas, que exprimem pois que o solido não tem movimento de rotação em roda d'esse ponto.

Um systema em equilibrio fica ainda em equilibrio se unirmos todos os seus pontos de modo a transformal-o em um solido invariavel; segue-se pois que, para o equilibrio de um systema livre, são necessarias as equações precedentes, mas que não são sufficientes.

9. Se as forças P forem parallelas, virão as equações

$$\Sigma \mathrm{P} = 0,$$

$$\mathrm{K} \cos(px) - \mathrm{H} \cos(py) = 0,$$

$$\mathrm{L} \cos(px) - \mathrm{H} \cos(pz) = 0,$$

$$\mathrm{L} \cos(py) - \mathrm{K} \cos(pz) = 0,$$

onde

$$\mathrm{H} = \Sigma \mathrm{P} r \cos(rx), \quad \mathrm{K} = \Sigma \mathrm{P} r \cos(ry), \quad \mathrm{L} = \Sigma \mathrm{P} r \cos(rz).$$

Estas tres ultimas equações determinam dois dos angulos que devem formar as forças com os tres eixos para que haja equilibrio relativamente ao movimento de rotação, quando o systema é dado. O terceiro angulo determina-se pela formula de *Geometria Analytica* (veja-se a *Memoria* do sr. Daniel Augusto da Silva, já citada):

$$\cos^2(px) + \cos^2(py) + \cos^2(pz) + 2\cos(px)\cos(py)\cos(xy) + 2\cos(py)\cos(pz)\cos(yz)$$
$$+ 2\cos(px)\cos(pz)\cos(xz) = 1.$$

Se H, K e L forem nullos, as equações precedentes são ainda satisfeitas; neste caso porém os angulos formados pelas forças com os eixos ficam arbitrarios.

Logo, *se forem nullas as sommas que se obtêem multiplicando as forças pelas projecções orthogonaes das vectores dos seus pontos de applicação respectivos sobre cada um dos tres eixos coordenados obliquos, bem como a somma das forças, o solido estará em equilibrio, qualquer que seja a direcção das forças.*

No caso contrario existe sempre uma força R, determinada pela equação $\Sigma \mathrm{P} + \mathrm{R} = 0$, que, sendo applicado a um ponto, determinado pelas equações

$$\mathrm{H} + \mathrm{R} r' \cos(r'x) = 0,$$

$$\mathrm{K} + \mathrm{R} r' \cos(r'y) = 0,$$

$$\mathrm{L} + \mathrm{R} r' \cos(r'z) = 0,$$

$$\mathrm{H}^2 + \mathrm{K}^2 + \mathrm{L}^2 + 2\mathrm{HK}\cos(xy) + 2\mathrm{KL}\cos(yz) + 2\mathrm{HL}\cos(xz) = \mathrm{R}^2 r'^2,$$

onde r' representa o seu vector e $(r'x)$, $(r'y)$ e $(r'z)$ os angulos que este vector forma com os eixos das coordenadas.

Applicando este principio á gravidade conclue-se:

A somma dos productos das massas de cada elemento de um corpo pelas projecções orthogonaes dos respectivos raios vectores sobre cada eixo das coordenadas é egual ao producto da massa do corpo pela projecção orthogonal, sobre o mesmo eixo, do seu centro de gravidade.

É neste principio que se funda a determinação do centro de gravidade dos solidos.

10. Procuremos agora a condição para que as forças que actuam sobre um solido tenham uma resultante unica.

Para isso devem as forças que actuam sobre o solido estar em equilibrio com a força egual e opposta á resultante; logo, representando X_1, Y_1, Z_1 as projecções orthogonaes das forças sobre os tres eixos obliquos e R_x, R_y, R_z as da resultante, vem

$$\Sigma X_1 - R_x = 0, \quad \Sigma Y_1 - R_y = 0, \quad \Sigma Z_1 - R_z = 0,$$

$$\Sigma (X_1 y_1 - Y_1 x_1) = R_x y'_1 - R_y x'_1,$$

$$\Sigma (Z_1 x_1 - X_1 z_1) = R_z x'_1 - R_x z'_1,$$

$$\Sigma (Y_1 z_1 - Z_1 y_1) = R_y z'_1 - R_z y'_1,$$

chamando x'_1, y'_1, z'_1 as coordenadas orthogonaes do ponto de applicação da resultante, referidas a eixos obliquos.

As tres primeiras equações precedentes determinam a intensidade da resultante e a sua direcção, as tres ultimas dão, como vamos ver, a condição para que a resultante exista e as coordenadas do seu ponto de applicação.

Façamos

$$L = \Sigma (X_1 y_1 - Y_1 x_1) = y'_1 \Sigma X_1 - x'_1 \Sigma Y_1,$$

$$M = \Sigma (Z_1 x_1 - X_1 z_1) = x'_1 \Sigma Z_1 - z'_1 \Sigma X_1,$$

$$N = \Sigma (Y_1 z_1 - Z_1 y_1) = z'_1 \Sigma Y_1 - y'_1 \Sigma Z_1.$$

Multiplicando a primeira das tres equações precedentes por ΣZ_1, a segunda por ΣY_1 e a terceira por ΣX_1, e sommando, vem

$$N \Sigma X_1 + M \Sigma Y_1 + L \Sigma Z_1 = 0,$$

equação que representa a condição para que haja resultante.

Ficam pois ainda duas equações, que pertencem a uma linha recta cuja direcção coincide com a da resultante, a qual póde ser applicada a um ponto qualquer d'esta recta.

11. As formulas (4) e (5) podem tomar outra forma.

Com effeito, as formulas (4), em virtude das equações (6) do capitulo I, dão

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}\cos(xy) + \mathrm{Z}\cos(xz) = 0,$$
$$\mathrm{X}\cos(xy) + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}\cos(yz) = 0,$$
$$\mathrm{X}\cos(xz) + \mathrm{Y}\cos(yz) + \mathrm{Z} = 0,$$

e portanto

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = 0,$$

visto que o determinante D, formado pelos coefficientes de X, Y e Z, é egual a

$$1 - \cos^2(xy) - \cos^2(xz) - \cos^2(yz) + 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz)$$

e não póde ser nullo, como vamos mostrar.

Para D ser egual a zero, deve ser

$$\cos(yx) = \cos(zx)\cos(zy) \pm \sqrt{\cos^2(zx)\cos^2(zy) - \cos^2(zx) - \cos^2(zy) + 1}$$
$$= \cos(zx)\cos(zy) \pm \operatorname{sen}(zx)\operatorname{sen}(zy) = \cos[(zx) \mp (zy)],$$

logo

$$\pm(yx) = (zx) \mp (zy),$$

o que não póde ter logar, porque com tres angulos, satisfazendo á condição precedente, não se póde formar angulo tiedro, como se sabe pelos *Elementos de Geometria.*

Passemos ás formulas (5). A primeira dá, em virtude das formulas (3) e (6) do capitulo I,

$$\Sigma\big(\mathrm{X} + \mathrm{Y}\cos(xy) + \mathrm{Z}\cos(xz)\big)\big(x\cos(xy) + y + z\cos(zy)\big)$$
$$- \Sigma\big(\mathrm{X}\cos(xy) + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}\cos(zy)\big)\big(x + y\cos(xy) + z\cos(xz)\big) = 0,$$

ou

$$\Sigma(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)\operatorname{sen}^2(xy) + \Sigma(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x)\big(\cos(zy) - \cos(xy)\cos(xz)\big)$$
$$+ \Sigma(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y)\big(\cos(zy)\cos(xy) - \cos(xz)\big) = 0.$$

Do mesmo modo se acham as duas equações

$$\Sigma(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)\big(\cos(yz) - \cos(xz)\cos(xy)\big) + \Sigma(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x)\operatorname{sen}^2(xz)$$
$$+ \Sigma(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y)\big(\cos(xy) - \cos(yz)\cos(xz)\big) = 0,$$

$$\Sigma(\mathrm{X}y-\mathrm{Y}x)\big(\cos(xy)\cos(yz)-\cos(xz)\big)$$

$$+\Sigma(\mathrm{X}z-\mathrm{Z}x)\big(\cos(xy)-\cos(xz)\cos(yz)\big)+\Sigma(\mathrm{Y}z-\mathrm{Z}y)\,\mathrm{sen}^2(yz)=0.$$

Estas tres equações dão

$$\Sigma(\mathrm{X}y-\mathrm{Y}x)=0,\quad \Sigma(\mathrm{X}z-\mathrm{Z}x)=0,\quad \Sigma(\mathrm{Y}z-\mathrm{Z}y)=0,$$

que são as equações conhecidas, a que Poinsot chegou muito simplesmente usando dos theoremas sobre os binarios.

Para tirar a conclusão precedente é necessario ainda demonstrar que não é identicamente nullo o determinante symetrico

$$\begin{vmatrix} \mathrm{sen}^2(xy) & \cos(zy)-\cos(xy)\cos(xz) & \cos(zy)\cos(xy)-\cos(xz) \\ \cos(yz)-\cos(xz)\cos(xy) & \mathrm{sen}^2(xz) & \cos(xy)-\cos(yz)\cos(xz) \\ \cos(xy)\cos(yz)-\cos(xz) & \cos(xy)-\cos(xz)\cos(yz) & \mathrm{sen}^2(yz) \end{vmatrix},$$

porque de contrario haveria eixos taes que o systema estaria em equilibrio sem serem satisfeitas as tres condições precedentes.

Com effeito, representando por D_1 o determinante precedente, temos

$$\mathrm{D}_1=2\big(\cos(zy)\cos(xy)-\cos(xz)\big)\big(\cos(zy)-\cos(xz)\cos(xy)\big)\big(\cos(xy)-\cos(xz)\cos(zy)\big)$$

$$-\big(\cos(xy)\cos(yz)-\cos(xz)\big)^2\,\mathrm{sen}^2(xz)-\big(\cos(xy)-\cos(yz)\cos(xz)\big)^2\,\mathrm{sen}^2(xy)$$

$$-\big(\cos(yz)-\cos(xz)\cos(xy)\big)^2\,\mathrm{sen}^2(yz)$$

$$+\,\mathrm{sen}^2(xy)\,\mathrm{sen}^2(xz)\,\mathrm{sen}^2(yz),$$

e portanto, substituindo os cosenos que entram nesta egualdade pelos seus valores em funcção dos senos dos mesmos angulos,

$$\mathrm{D}_1=\big(1-\cos^2(xy)-\cos^2(xz)-\cos^2(yz)+2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz)\big)^2=\mathrm{D}^2,$$

mas já mostrámos que D não póde ser nullo, logo tambem o determinante de que tratamos o não póde ser.

Conclue-se pois que as condições de equilibrio de um solido invariavel são

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma\mathrm{X}=0,\quad \Sigma\mathrm{Y}=0,\quad \Sigma\mathrm{Z}=0,\\ \Sigma(\mathrm{X}y-\mathrm{Y}x)=0,\quad \Sigma(\mathrm{X}x-\mathrm{Z}x)=0,\quad \Sigma(\mathrm{Y}z-\mathrm{Z}y)=0. \end{cases}$$

As tres primeiras equações exprimem que o solido não tem movimento de translação, e as tres ultimas exprimem que não tem movimento de rotação em roda dos eixos das coordenadas.

Estas ultimas equações dão (em virtude das formulas (A) da *Memoria* citada do sr. Daniel Augusto da Silva)

$$\Sigma \mathrm{P}\, r \cos(\mathrm{N}x) \,\mathrm{sen}\, (\mathrm{P}\, r) = 0,$$
$$\Sigma \mathrm{P}\, r \cos(\mathrm{N}y) \,\mathrm{sen}\, (\mathrm{P}\, r) = 0,$$
$$\Sigma \mathrm{P}\, r \cos(\mathrm{N}z) \,\mathrm{sen}\, (\mathrm{P}\, r) = 0,$$

chamando $(\mathrm{N}x)$, $(\mathrm{N}y)$, $(\mathrm{N}z)$ os angulos formados pela normal ao plano da força e do raio vector do ponto de applicação com os eixos coordenados. E facil de ver que $\mathrm{P}r \,\mathrm{sen}\, (\mathrm{P}r)$ é a área do parallelogrammo cujos dois lados são P e r, e podemos pois enunciar as tres ultimas condições de equilibrio do solido invariavel da maneira seguinte:

Para o equilibrio de um solido invariavel livre é necessario que as sommas das projecções sobre cada plano coordenado das áreas dos parallelogrammos formados pelas forças e pelos raios vectores dos seus pontos de applicação sejam separadamente nullas.

Em virtude da formula (E′) da mesma *Memoria*, vem, chamando A, B, C os angulos dos planos coordenados,

$$\begin{aligned}\Sigma \mathrm{P}^2 r^2 \,\mathrm{sen}^2 (\mathrm{P}r) = {} & [\Sigma(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})]^2 \,\mathrm{sen}^2 (xy) + [\Sigma(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})]^2 \,\mathrm{sen}^2 (yz) + [\Sigma(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})]^2 \,\mathrm{sen}^2 (xz) \\ & - 2\Sigma(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\,\Sigma(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) \,\mathrm{sen}\,(yz) \,\mathrm{sen}\,(xz) \cos \mathrm{C} \\ & - 2\Sigma(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,\Sigma(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) \,\mathrm{sen}\,(xy) \,\mathrm{sen}\,(xz) \cos \mathrm{B} \\ & + 2\Sigma(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,\Sigma(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) \,\mathrm{sen}\,(xy) \,\mathrm{sen}\,(yz) \cos \mathrm{A},\end{aligned}$$

formula que mostra que a funcção de x, y, z, x', y', z', etc., X, Y, Z, X′, Y′, Z′, etc., que constitue o segundo membro, conserva o mesmo valor ainda que variem os eixos das coordenadas, e que dá uma relação entre a somma das áreas dos parallelogrammos formados por cada força e pelo raio vector tirado para o seu ponto de applicação e as projecções d'estas áreas sobre os planos coordenados, as quaes são (*Memoria* citada)

$$(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) \,\mathrm{sen}\,(xy), \quad (y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) \,\mathrm{sen}\,(yz), \quad (z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) \,\mathrm{sen}\,(xz).$$

12. O principio enunciado no n.º 9, sendo applicado á gravidade, traduz-se pelas formulas:

$$\Sigma m\, r \cos(rx) = \mathrm{M\, R} \cos(\mathrm{R}x),$$
$$\Sigma m\, r \cos(ry) = \mathrm{M\, R} \cos(\mathrm{R}y),$$
$$\Sigma m\, r \cos(rz) = \mathrm{M\, R} \cos(\mathrm{R}z),$$

sendo m a massa de cada elemento do corpo e M a massa total do mesmo.

Estas formulas dão, em virtude das formulas (3) do capitulo I,

$$\Sigma m \left(x + y \cos(xy) + z \cos(xz)\right) = \mathrm{M} \left(x_1 + y_1 \cos(xy) + z_1 \cos(xz)\right),$$
$$\Sigma m \left(y + x \cos(xy) + z \cos(yz)\right) = \mathrm{M} \left(y_1 + x_1 \cos(xy) + z_1 \cos(yz)\right),$$
$$\Sigma m \left(z + x \cos(xz) + y \cos(yz)\right) = \mathrm{M} \left(z_1 + x_1 \cos(xz) + y_1 \cos(yz)\right),$$

sendo x_1, y_1, z_1 as coordenadas do centro de gravidade do corpo.

D'aqui conclue-se, visto que o determinante formado pelos coefficientes de $\Sigma mx - \mathrm{M}x_1$, $\Sigma my - \mathrm{M}y_1$, $\Sigma mz - \mathrm{M}z_1$ coincide com o determinante D, considerado no n.º 11, e não póde ser nullo, como já mostrámos,

$$\Sigma mx = \mathrm{M}x_1, \quad \Sigma my = \mathrm{M}y_1, \quad \Sigma mz = \mathrm{M}z_1,$$

equações que determinam as coordenadas do centro de gravidade de um corpo relativamente a tres eixos coordenados obliquos.

É facil de ver que estas formulas applicam-se tambem á determinação do centro de gravidade de um systema livre.

13. As equações do equilibrio de um solido invariavel podem ainda deduzir-se seguindo outro caminho, que vamos expôr.

A condição da solidez de um corpo realiza-se conservando todos os pontos a mesma distancia entre si, e portanto conservando a mesma distancia entre si uma serie de pontos que formem um fio, qualquer que seja a direcção d'este fio.

Sejam x_1, y_1, z_1 as coordenadas de um ponto do corpo, referidas a eixos obliquos, mas obtidas por projecções orthogonaes do ponto sobre os mesmos eixos; serão $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$, $x_1 + 2\,dx_1 + d^2 x_1$, $y_1 + 2\,dy_1 + d^2 y_1$, $z_1 + 2\,dz_1 + d^2 z_1$, etc. as coordenadas dos pontos seguintes de um fio considerado no corpo. Sejam ainda (x, y, z) as coordenadas obliquas ordinarias do primeiro ponto, e portanto $(x + dx, y + dy, z + dz)$, $(x + 2\,dx + d^2 x, y + 2\,dy + d^2 y, z + 2\,dz + d^2 z)$, etc. as dos seguintes.

Escrevendo a equação (4) do n.º 2 debaixo da fórma seguinte:

$$\delta p = \cos(px)\,\delta(x'' - x') + \cos(py)\,\delta(y'' - y') + \cos(pz)\,\delta(z'' - z'),$$

representando agora por $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ as componentes dos deslocamentos virtuaes dos pontos (x', y', z') e (x'', y'', z'') e por δp a variação da distancia entre estes pontos, em virtude dos referidos deslocamentos, e pondo nella

$$p = ds, \quad x'' = x + dx, \quad y'' = y + dy, \quad z'' = z + dz, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$
$$\cos(px) = \frac{dx_1}{ds}, \quad \cos(py) = \frac{dy_1}{ds}, \quad \cos(pz) = \frac{dz_1}{ds},$$

temos

$$(A) \qquad ds\,\delta ds = dx_1\,\delta dx + dy_1\,\delta dy + dz_1\,\delta dz.$$

Pondo depois

$$p = ds + d^2 s, \quad x'' = x + 2dx + d^2 x, \quad y'' = y + 2dy + d^2 y, \quad z'' = z + 2dz + d^2 z,$$

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz,$$

$$\cos(px_1) = \frac{dx_1 + d^2 x_1}{ds + d^2 s}, \quad \cos(py_1) = \frac{dy_1 + d^2 y_1}{ds + d^2 s}, \quad \cos(pz_1) = \frac{dz_1 + d^2 z_1}{ds + d^2 s};$$

e, attendendo á relação seguinte, que resulta de differenciar (A),

$$d^2 s\,\delta ds + ds\,\delta d^2 s = d^2 x_1\,\delta dx + dx_1\,\delta d^2 x + d^2 y_1\,\delta dy + dy_1\,\delta d^2 y + d^2 z_1\,\delta dz + dz_1\,\delta d^2 z,$$

vem

$$d^2 s\,\delta d^2 s = d^2 x_1\,\delta d^2 x + d^2 y_1\,\delta d^2 y + d^2 z_1\,\delta d^2 z.$$

Do mesmo modo se acham as egualdades

$$d^3 s\,\delta d^3 s = d^3 x_1\,\delta d^3 x + d^3 y_1\,\delta d^3 y + d^3 z_1\,\delta d^3 z,$$

$$d^4 s\,\delta d^4 s = d^4 x_1\,\delta d^4 x + d^4 y_1\,\delta d^4 y + d^4 z_1\,\delta d^4 z,$$

. . . .

As formulas antecedentes seguem uma lei muito simples, cuja generalidade é facil mostrar. Encontram-se na *Mecanica Analytica* de Lagrange, porém demonstradas sómente para o caso de os eixos coordenados serem orthogonaes.

Suppondo x a variavel independente, e portanto dx constante e $d^2 x = d^3 x = \ldots = 0$, vêem pois, para condições da solidez, as equações

$$dx_1\,\delta dx + dy_1\,\delta dy + dz_1\,\delta dz = 0,$$

$$d^2 y_1\,d^2\delta y + d^2 z_1\,d^2\delta z = 0,$$

$$d^3 y_1\,d^3\delta y + d^3 z_1\,d^3\delta z = 0.$$

As outras não são distinctas d'estas, o que me dispenso de estar a provar aqui, porque vem demonstrado na *Mecanica Analytica*. Estas equações integram-se como as correspondentes da *Mecanica Analytica* e os seus integraes são

$$(7) \qquad \begin{cases} \delta x = \delta l - y_1\,\delta N + z_1\,\delta M, \\ \delta y = \delta m + x_1\,\delta N - z_1\,\delta L, \\ \delta z = \delta n - x_1\,\delta M + y_1\,\delta L. \end{cases}$$

Substituindo estas variações na formula (5) do capitulo I e egualando a zero os coefficientes das indeterminadas δm, δn, δl, δM, δN, δL, vêem as equações

$$\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0, \quad \Sigma Z_1 = 0,$$

$$\Sigma (X_1 z_1 - Z_1 x_1) = 0,$$

$$\Sigma (Y_1 x_1 - X_1 y_1) = 0,$$

$$\Sigma (Z_1 y_1 - Y_1 z_1) = 0,$$

que são as equações (4) e (5), a que já haviamos chegado de outro modo.

Temos pois mostrado que, determinando os pontos no espaço por projecções orthogonaes sobre eixos obliquos, chega-se a equações, para exprimir o equilibrio do solido invariavel, que têem a mesma forma que no caso de os eixos serem orthogonaes.

Já dissemos que estas equações têem logar para um systema qualquer livre. Notaremos ainda que, se tivermos um systema qualquer livre, e houver forças *interiores*, actuando sobre o systema, taes que a uma força sollicitando um ponto A para B corresponda outra egual e opposta sollicitando B para A, estas forças não entrarão nas equações (4) e (5), nem portanto em (6).

Com effeito, a somma dos momentos virtuaes de duas forças P, eguaes e oppostas, será (capitulo I)

$$P\{\cos(px)(dx - dx') + \cos(py)(dy - dy') + \cos(pz)(dz - dz')\} = P\,dp,$$

expressão que é nulla em virtude da invariabilidade da distancia p dos pontos (x, y, z) e (x', y', z'); e portanto a força interior P não entra em (3), nem portanto em (4), (5) e (6).

CAPITULO III

Sobre os principios geraes da Dynamica

14. *Movimento de um systema qualquer de pontos.*

Passemos agora á determinação das equações do movimento de um systema qualquer de pontos ligados de qualquer modo.

Sejam P, Q, R, ... as forças que actuam sobre o systema. Suppondo-o referido a tres eixos coordenados obliquos, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$ representarão, como no caso dos eixos orthogonaes, as componentes das velocidades de um ponto qualquer (x, y, z) e $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ e $\frac{d^2z}{dt^2}$ as componentes da sua acceleração.

Chamando m a massa de um qualquer dos pontos do systema, as forças que produzem o seu movimento serão eguaes a $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$.

Estas forças devem ser equivalentes ás forças P, Q, R, ...; logo (n.º 4) temos, representando agora por δx, δy, δz e δp as quantidades que no n.º 4 se representaram por dx, dy, dz e dp, isto é, as componentes segundo os eixos das coordenadas do deslocamento virtual do ponto (x, y, z) e a variação da distancia d'este ponto ao centro da força P,

$$(1)\qquad \Sigma \mathrm{P}\,\delta p = \Sigma m \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}\left(\delta x + \delta y.\cos(xy) + \delta z.\cos(xz)\right) \\ &+ \frac{d^2y}{dt^2}\left(\delta y + \delta x.\cos(yx) + \delta z.\cos(yz)\right) \\ &+ \frac{d^2z}{dt^2}\left(\delta z + \delta x.\cos(xz) + \delta y.\cos(yz)\right), \end{aligned} \right.$$

ou [capitulo I, formula (3)]

$$(2)\qquad \Sigma \mathrm{P}\,\delta p = \Sigma m \left[\frac{d^2.r\cos(rx)}{dt^2}\delta x + \frac{d^2.r\cos(ry)}{dt^2}\delta y + \frac{d^2.r\cos(rz)}{dt^2}\delta z \right],$$

chamando r o raio vector do ponto (x, y, z).

O primeiro membro das equações precedentes póde escrever-se do modo seguinte:

$$(3)\qquad \Sigma\, P\,\delta p = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} X\left(\delta x + \delta y \cos(xy) + \delta z \cos(xz)\right) \\ + Y\left(\delta y + \delta x \cos(yx) + \delta z \cos(yz)\right) \\ + Z\left(\delta z + \delta x \cos(xz) + \delta y \cos(yz)\right), \end{array} \right.$$

ou ainda

$$(4)\qquad \Sigma\, P\,\delta p = \Sigma\, P\left[\cos(px)\,\delta x + \cos(py)\,\delta y + \cos(pz)\,\delta z\right].$$

Chamando x_1, y_1, z_1 (como até aqui temos feito) as coordenadas do ponto (x, y, z), obtidas por projecções orthogonaes sobre eixos obliquos, e X_1, Y_1, Z_1 as projecções da força P, obtidas do mesmo modo, vem a equação do movimento de um systema qualquer:

$$(5)\qquad \Sigma\left(X_1\,\delta x + Y_1\,\delta y + Z_1\,\delta z\right) = \Sigma\, m\left[\frac{d^2 x_1}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y_1}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z_1}{dt^2}\,\delta z\right].$$

O sommatorio Σ deve extender-se a todos os pontos do systema e a todas as forças.

A formula (5) tem a mesma forma que se os eixos coordenados fossem orthogonaes, e é muito mais simples do que a que resulta de egualar os segundos membros de (1) e (3).

Da formula (1), combinada com (3) ou (4), deduzem-se as equações do movimento de um systema qualquer, procedendo do mesmo modo que nas questões de equilibrio, isto é, eliminando por meio das equações que exprimem as ligações as variações que se poderem eliminar, e egualando a zero os coefficientes das restantes. As coordenadas que se devem usar nestas equações são as cartesianas obliquas.

Podem tambem deduzir-se as equações do movimento de um systema da formula (5), eliminando do mesmo modo por meio das equações de condição as variações que se poderem eliminar. Neste caso, se as coordenadas que entram nas equações de condição forem x_1, y_1, z_1, etc., isto é, as rectas que se obtêem projectando o ponto orthogonalmente sobre os tres eixos, devem exprimir-se, depois de as variar, δx_1, δy_1, δz_1, etc. em funcção de δx, δy, δz, etc., usando das formulas que vêem no fim do n.º 5. Se as equações estiverem expressas em coordenadas cartesianas, devem variar-se primeiramente, e depois substituir-se x, y, z, etc. pelos seus valores expressos em x_1, y_1, z_1, etc., dados pelas mesmas formulas.

15. Como as equações de equilibrio de um solido invariavel são condições necessarias para o equilibrio de um systema qualquer livre, como já vimos, e a equação fundamental do movimento tem a mesma forma que a equação fundamental do equilibrio, as equações do movimento de um solido invariavel têem tambem logar no movimento de qualquer systema livre. Vamos pois procurar estas equações.

Temos para isso de eliminar em (1) ou (5) as variações das variaveis que se podérem eliminar por meio das equações que exprimem a invariabilidade das distancias entre os pontos

do systema dois a dois. Tinhamos pois de proceder como no capitulo II, n.º 8; mas é escusado repetir o calculo, pois a comparação das formulas fundamentaes do equilibrio e do movimento mostra que basta n'aquellas suppor que as forças são P, Q, R, ... $-m\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z_1}{dt^2}$, etc., quando queremos empregar a formula (5), ou P, Q, R, ... $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, etc., quando queremos empregar a formula (1).

Vêem no primeiro caso as equações

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma\left(X_1 - m\frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = 0, \\ \Sigma\left(Y_1 - m\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) = 0, \\ \Sigma\left(Z_1 - m\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) = 0; \end{cases}$$

e no segundo

$$(7)\qquad \begin{cases} \Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0, \\ \Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \\ \Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0, \end{cases}$$

que têem a mesma forma que as anteriores, mas que correspondem a diverso systema de coordenadas.

Além das formulas (6) vêem, quando se emprega a formula (5), as equações

$$(8)\qquad \begin{cases} \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1) = \Sigma m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}z_1 - \frac{d^2z_1}{dt^2}x_1\right), \\ \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1) = \Sigma m\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}x_1 - \frac{d^2x_1}{dt^2}y_1\right), \\ \Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1) = \Sigma m\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}y_1 - \frac{d^2y_1}{dt^2}z_1\right), \end{cases}$$

e, quando se emprega a formula (1),

$$(9)\qquad \begin{cases} \Sigma(Xz - Zx) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}z - \frac{d^2z}{dt^2}x\right), \\ \Sigma(Yx - Xy) = \Sigma m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{d^2x}{dt^2}y\right), \\ \Sigma(Zy - Yz) = \Sigma m\left(\frac{d^2z}{dt^2}y - \frac{d^2y}{dt^2}z\right). \end{cases}$$

Vamos ver quaes as propriedades que se deduzem das formulas (6), (7), (8) e (9).

16. *Algumas consequencias das equações precedentes.*

1.º Representemos por k_1, l_1, m_1 as coordenadas do centro de gravidade de um systema livre, referidas aos eixos obliquos primitivos, mas obtidas projectando este ponto orthogonalmente sobre os eixos, por α_1, β_1, γ_1 as coordenadas de um ponto qualquer do solido, referidas a eixos passando pelo centro de gravidade parallelamente aos primitivos. Teremos, pela propriedade do centro de gravidade de que fallámos no n.º 12,

$$\Sigma m \alpha_1 = 0, \quad \Sigma m \beta_1 = 0, \quad \Sigma m \gamma_1 = 0,$$

d'onde se deduz

$$\Sigma m \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} = 0;$$

mas

$$x_1 = \alpha_1 + k_1, \quad y_1 = \beta_1 + l_1, \quad z_1 = \gamma_1 + m_1;$$

logo

$$\Sigma m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2 (\alpha_1 + k_1)}{dt^2} = \frac{d^2 k_1}{dt^2} \Sigma m.$$

Do mesmo modo se obtêem as equações

$$\Sigma m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2 l_1}{dt^2} \Sigma m, \quad \Sigma m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{d^2 m_1}{dt^2} \Sigma m.$$

As formulas (6) dão pois as seguintes, que determinam o movimento do centro de gravidade do systema:

$$(10) \quad \begin{cases} \Sigma X_1 - M \dfrac{d^2 k_1}{dt^2} = 0, \\ \Sigma Y_1 - M \dfrac{d^2 l_1}{dt^2} = 0, \\ \Sigma Z_1 - M \dfrac{d^2 m_1}{dt^2} = 0, \end{cases}$$

em que M representa a massa total do systema Σm.

Estas equações mostram que o centro de gravidade tem o mesmo movimento que teria, se toda a massa do solido estivesse nelle concentrada, e todas as forças ahi fossem transportadas, sem mudar de direcção, como se póde ver applicando a formula (5) ao ponto (k_1, l_1, m_1).

As equações (7) dão do mesmo modo

$$\Sigma X - M \frac{d^2 k}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma Y - M \frac{d^2 l}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma Z - M \frac{d^2 m}{dt^2} = 0,$$

que levam ás mesmas conclusões.

2.º Se o systema fosse sollicitado por forças taes que não tivesse movimento de rotação, se se tornasse rigido pela introducção de novas ligações, seriam nullos os primeiros membros das equações (8), e estas equações, integrando-as, dariam as seguintes:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \left(z_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dz_1}{dt} \right) m = A, \\ \Sigma \left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right) m = B, \\ \Sigma \left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} \right) m = C, \end{array} \right.$$

que são de primeira ordem, e onde A, B e C são constantes arbitrarias.

As equações (9) dão no mesmo caso

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) m = A, \\ \Sigma \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) m = B, \\ \Sigma \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) m = C. \end{array} \right.$$

No caso de o systema ter um ponto fixo, as equações (11) e (12) ainda teriam logar, tomando este ponto para origem das coordenadas; no caso porém de ter um eixo fixo, tomando-o para eixo dos z, só teriam logar as segundas das equações (11) e (12). Isto no caso de as forças que sollicitam o systema serem taes que, se se tornasse rigido, ficasse em equilibrio.

17. Quando os pontos do systema são sollicitados uns para os outros por forças interiores e estas acções reciprocas são eguaes e oppostas, estas forças não entram nas equações (6), (7), (8) e (9), segundo o que se demonstrou no fim do n.º 13. Aqui vou mostrar que,

para estas forças não entrarem nestas formulas, não é necessario que as acções reciprocas sejam eguaes, e dar assim uma extensão nova aos principios precedentes.

No que vae seguir supporemos os eixos das coordenadas obliquos, as coordenadas dos pontos obtidas por projecções orthogonaes sobre estes eixos, e estes pontos sollicitados uns para os outros por forças interiores, actuando segundo uma funcção qualquer das suas distancias respectivas, de modo que seja, para dois pontos de coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x'_1, y'_1, z'_1),

$$F = Cf(r),$$

sendo C uma quantidade que póde variar com o ponto attrahente mas que é independente do ponto attrahido.

Serão as projecções sobre os eixos coordenados da força F com que o ponto (x'_1, y'_1, z'_1) sollicita (x_1, y_1, z_1)

$$X_1 = C^{(1)} f(r) \cos(rx), \quad Y_1 = C^{(1)} f(r) \cos(ry), \quad Z_1 = C^{(1)} f(r) \cos(rz).$$

Mas [capitulo I, formula (4)]

$$\frac{dr}{dx} = \cos(rx), \quad \frac{dr}{dy} = \cos(ry), \quad \frac{dr}{dz} = \cos(rz).$$

Logo, chamando $\varphi(r)$ uma funcção cuja derivada em ordem a r seja $f(r)$, e fazendo $U = C^{(1)} \varphi(r)$, resulta

$$X_1 = \frac{dU}{dx}, \quad Y_1 = \frac{dU}{dy}, \quad Z_1 = \frac{dU}{dz}.$$

Posto isto, as equações do movimento de um ponto qualquer (x_1, y_1, z_1) são, como é facil de ver,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma \frac{dU}{dy}, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma \frac{dU}{dz},$$

extendendo o sommatorio a todos os pontos que actuam sobre (x_1, y_1, z_1).

Estas equações podem escrever-se

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dV^{(0)}}{dx}, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{dV^{(0)}}{dy}, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{dV^{(0)}}{dz},$$

sendo

$$V^{(0)} = \Sigma C^{(n)} \varphi(r_n),$$

onde $C^{(n)}$ é o coefficiente de attracção do ponto $(x_1^{(n)}, y_1^{(n)}, z_1^{(n)})$ e r_n a sua distancia ao ponto (x_1, y_1, z_1), e onde se deve dar a n os valores 1, 2, 3, ...

Equações analogas têem logar para os outros pontos, isto é:

$$\frac{d^2 x_1'}{dt^2} = \frac{d V^{(1)}}{dx'}, \quad \frac{d^2 y_1'}{dt^2} = \frac{d V^{(1)}}{dy'}, \quad \frac{d^2 z_1'}{dt^2} = \frac{d V^{(1)}}{dz'},$$

$$\frac{d^2 x_1''}{dt^2} = \frac{d V^{(2)}}{dx''}, \quad \frac{d^2 y_1''}{dt^2} = \frac{d V^{(2)}}{dy''}, \quad \frac{d^2 z_1''}{dt^2} = \frac{d V^{(2)}}{dz''},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

onde

$$V^{(1)} = \Sigma\, C^{(n)} \varphi(r_n'), \quad V^{(2)} = \Sigma\, C^{(n)} \varphi(r_n''), \quad \text{etc.},$$

r_n' representando a distancia do ponto $(x_1^{(n)}, y_1^{(n)}, z_1^{(n)})$ ao ponto (x_1', y_1', z_1'), r_n'' a distancia do ponto $(x_1^{(n)}, y_1^{(n)}, z_1^{(n)})$ ao ponto (x_1'', y_1'', z_1''), etc., e n devendo ter os valores 0, 2, 3, ... em V', os valores 0, 1, 3, 4, ... em V'', etc.

Sommando separadamente os tres grupos de equações assim formados, depois de as multiplicar por $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, ..., resulta

$$\Sigma\, C^{(n)} \frac{d^2 x_1^{(n)}}{dt^2} = \Sigma\, C^{(n)} \frac{d V^{(n)}}{dx^{(n)}},$$

$$\Sigma\, C^{(n)} \frac{d^2 y_1^{(n)}}{dt^2} = \Sigma\, C^{(n)} \frac{d V^{(n)}}{dy^{(n)}},$$

$$\Sigma\, C^{(n)} \frac{d^2 z_1^{(n)}}{dt^2} = \Sigma\, C^{(n)} \frac{d V^{(n)}}{dz^{(n)}},$$

onde o sommatorio se deve extender a todos os pontos.

O segundo membro da primeira d'estas egualdades póde de ser escripto do modo seguinte:

$$C^{(0)} \left[C^{(1)} f(r_1) \frac{dr_1}{dx} + C^{(2)} f(r_2) \frac{dr_2}{dx} + \dots \right]$$

$$+ C^{(1)} \left[C^{(0)} f(r_0') \frac{dr_0'}{dx'} + C^{(2)} f'(r_2') \frac{dr_2'}{dx'} + \dots \right]$$

$$+ C^{(2)} \left[C^{(0)} f(r_0'') \frac{dr_0''}{dx''} + C^{(1)} f''(r_1'') \frac{dr_1''}{dx''} + \dots \right]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

temos porém

$$r_1 = r_0', \quad r_2 = r_0'', \quad r_2' = r_1'', \quad \dots,$$

e

$$\frac{dr_1}{dx} = -\frac{dr_1}{dx'}, \quad \frac{dr_2}{dx} = -\frac{dr_2}{dx''}, \quad \frac{dr'_1}{dx} = -\frac{dr'_2}{dx'} \quad \dots;$$

logo o seu valor é egual a zero.

Temos pois

$$\Sigma C^{(n)} \frac{d V^{(n)}}{dx^{(n)}} = 0.$$

Do mesmo modo se mostra que

$$\Sigma C^{(n)} \frac{d V^{(n)}}{dy^{(n)}} = 0, \quad \Sigma C^{(n)} \frac{d V^{(n)}}{dz^{(n)}} = 0.$$

Temos pois

$$\Sigma C^{(n)} \frac{d^2 x_1^{(n)}}{dt^2} = 0, \quad \Sigma C^{(n)} \frac{d^2 y_1^{(n)}}{dt^2} = 0, \quad \Sigma C^{(n)} \frac{d^2 z_1^{(n)}}{dt^2} = 0.$$

Supponhamos agora applicadas aos diversos pontos do systema (x_1, y_1, z_1), (x'_1, y'_1, z'_1), etc. forças parallelas e proporcionaes a $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, etc. Estas forças terão uma resultante applicada a um ponto, que chamaremos *centro do systema*. Tomando este ponto para origem das coordenadas, chamando $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$, etc. as coordenadas dos diversos pontos do systema, referidas a esta origem e a eixos parallelos aos primitivos, e $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ as do centro do systema, referidas aos eixos primitivos, virá

$$\Sigma C^{(n)} \alpha_1^{(n)} = 0, \quad \Sigma C^{(n)} \beta_1^{(n)} = 0, \quad \Sigma C^{(n)} \gamma_1^{(n)} = 0,$$

extendendo o sommatorio a todos os pontos do systema.

Estas equações dão

$$\Sigma C^{(n)} \frac{d^2 \alpha_1^{(n)}}{dt^2} = 0, \quad \Sigma C^{(n)} \frac{d^2 \beta_1^{(n)}}{dt^2} = 0, \quad \Sigma C^{(n)} \frac{d^2 \gamma_1^{(n)}}{dt^2} = 0;$$

mas

$$\Sigma C^{(n)} \frac{d^2 x_1^{(n)}}{dt^2} = \Sigma C^{(n)} \frac{d^2 (\alpha_1^{(n)} + \lambda_1)}{dt^2} = 0;$$

logo

$$\frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} \Sigma C^{(n)} = 0,$$

e do mesmo modo

$$\frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \Sigma C^{(n)} = 0, \quad \frac{d^2 \nu_1}{dt^2} \Sigma C^{(n)} = 0.$$

Temos pois

$$\frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \nu_1}{dt^2} = 0.$$

Os integraes d'estas equações mostram que o *centro do systema* tem um movimento rectilineo e uniforme.

Se, além das forças de attracção reciproca, houvessem forças exteriores que actuassem sobre o systema, viria

$$\frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} \Sigma C^{(n)} = \Sigma C^{(n)} X_1^{(n)}, \quad \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \Sigma C^{(n)} = \Sigma C^{(n)} Y_1^{(n)}, \quad \frac{d^2 \nu_1}{dt^2} \Sigma C^{(n)} = \Sigma C^{(n)} Z_1^{(n)},$$

onde não entram as forças de attracção, e vê-se pois que o *centro do systema* póde ter um movimento independente das forças de attracção reciproca dos pontos, ainda que estas forças não sejam duas a duas eguaes.

Passemos ás equações relativas ao movimento de rotação do systema.

As equações precedentemente achadas dão

$$\Sigma C^{(n)} \left(z_1^{(n)} \frac{d^2 x_1^{(n)}}{dt^2} - x_1^{(n)} \frac{d^2 z_1^{(n)}}{dt^2} \right) = \Sigma C^{(n)} \left(\frac{d V^{(n)}}{dx^{(n)}} z_1^{(n)} - \frac{d V^{(n)}}{dz^{(n)}} x_1^{(n)} \right),$$

$$\Sigma C^{(n)} \left(x_1^{(n)} \frac{d^2 y_1^{(n)}}{dt^2} - y_1^{(n)} \frac{d^2 x_1^{(n)}}{dt^2} \right) = \Sigma C^{(n)} \left(\frac{d V^{(n)}}{dy^{(n)}} x_1^{(n)} - \frac{d V^{(n)}}{dx^{(n)}} y_1^{(n)} \right),$$

$$\Sigma C^{(n)} \left(y_1^{(n)} \frac{d^2 z_1^{(n)}}{dt^2} - z_1^{(n)} \frac{d^2 y_1^{(n)}}{dt^2} \right) = \Sigma C^{(n)} \left(\frac{d V^{(n)}}{dz^{(n)}} y_1^{(n)} - \frac{d V^{(n)}}{dy^{(n)}} z_1^{(n)} \right),$$

extendendo o sommatorio a todos os pontos do systema.

Mas por ser

$$\cos(r_m^{(n)} x) = \frac{x_1^{(n)} - x_1^{(m)}}{r_m^{(n)}}, \quad \cos(r_m^{(n)} y) = \frac{y_1^{(n)} - y_1^{(m)}}{r_m^{(n)}}, \quad \cos(r_m^{(n)} z) = \frac{z_1^{(n)} - z_1^{(m)}}{r_m^{(n)}},$$

e

$$\frac{dr_m^{(n)}}{dx} = \cos(r_m^{(n)} x), \quad \frac{dr_m^{(n)}}{dy} = \cos(r_m^{(n)} y), \quad \frac{dr_m^{(n)}}{dz} = \cos(r_m^{(n)} z)$$

temos

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(\frac{d\,\mathrm{V}^{(n)}}{dx^{(n)}}\, z_1^{(n)} - \frac{d\,\mathrm{V}^{(n)}}{dz^{(n)}}\, x_1^{(n)} \right) = 0,$$

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(\frac{d\,\mathrm{V}^{(n)}}{dy^{(n)}}\, x_1^{(n)} - \frac{d\,\mathrm{V}^{(n)}}{dx^{(n)}}\, y_1^{(n)} \right) = 0,$$

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(\frac{d\,\mathrm{V}^{(n)}}{dz^{(n)}}\, y_1^{(n)} - \frac{d\,\mathrm{V}^{(n)}}{dy^{(n)}}\, z_1^{(n)} \right) = 0;$$

logo

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(z_1^{(n)} \frac{d^2 x_1^{(n)}}{dt^2} - x_1^{(n)} \frac{d^2 z_1^{(n)}}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(x_1^{(n)} \frac{d^2 y_1^{(n)}}{dt^2} - y_1^{(n)} \frac{d^2 x_1^{(n)}}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(y_1^{(n)} \frac{d^2 z_1^{(n)}}{dt^2} - z_1^{(n)} \frac{d^2 y_1^{(n)}}{dt^2} \right) = 0.$$

Integrando estas equações, resulta

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(z_1^{(n)} \frac{dx_1^{(n)}}{dt} - x_1^{(n)} \frac{dz_1^{(n)}}{dt} \right) = \mathrm{A},$$

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(x_1^{(n)} \frac{dy_1^{(n)}}{dt} - y_1^{(n)} \frac{dx_1^{(n)}}{dt} \right) = \mathrm{B},$$

$$\Sigma\, \mathrm{C}^{(n)} \left(y_1^{(n)} \frac{dz_1^{(n)}}{dt} - z_1^{(n)} \frac{dy_1^{(n)}}{dt} \right) = \mathrm{C},$$

sendo A, B e C constantes arbitrarias.

18. Quando o deslocamento virtual de um systema coincidir com o deslocamento real, o que só póde ter logar, como é sabido, quando as equações de condição contiverem o tempo explicitamente, δx, δy, δz, etc. coincidirão com as differenciaes dx, dy, dz, etc., e a formula (1) reduzir-se-ha a

$$\Sigma\, \mathrm{P}\, dp = \Sigma\, m \frac{d^2 x\, dx + d^2 y\, dy + d^2 z\, dz}{dt^2}$$

$$+ \Sigma\, m \frac{(d^2 x\, dy + d^2 y\, dx) \cos (xy) + (d^2 x\, dz + d^2 z\, dx) \cos (xz) + (d^2 y\, dz + d^2 z\, dy) \cos (yz)}{dt^2},$$

ou

$$\Sigma\, \mathrm{P}\, dp = \Sigma\, m \frac{d\,[dx^2 + dy^2 + dz^2]}{2\, dt^2} + \Sigma\, m \frac{d\,[dx\, dy \cos (xy) + dx\, dz \cos (xz) + dy\, dz \cos (yz)]}{dt^2}.$$

Mas, sendo $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ as componentes da velocidade do ponto (x, y, z), a equação precedente póde escrever-se

$$\frac{1}{2} \Sigma \, d \, m \, v^2 = \Sigma \, \mathrm{P} \, dp,$$

equação que encerra o principio das forças vivas e que integrada dá, suppondo

$$\Sigma \, \mathrm{P} \, dp = d\lambda,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma \, mv^2 = \lambda + h,$$

sendo h constante arbitraria.

VII

NOTE SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

(American Journal of Mathematics, t. VII. Baltimore 1885)

NOTE SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

Dans un intéressant mémoire intitulé, *Some Notes on the Numbers of Bernoulli and Euler,* publié dans le volume v du *American Journal of Mathematics,* Mr. G. S. Ely obtient, au moyen des séries qui résultent du développement de $\tang x$, de $\cot x$, de $\sec^p x$, etc., quelques relations entre les nombres de Bernoulli et entre les nombres d'Euler. Le but de la présente note est de signaler encore quelques résultats relatifs aux mêmes nombres qu'on peut trouver au moyen du développement de $\sec x$, de $(1+e^x)^{-1}$, de $\sec^p x$, etc.

1. Considérons premièrement la fonction

$$y = (1+e^x)^{-1}.$$

La dérivée d'ordre n de cette fonction est donnée par la formule [1]

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{n!\, i!\, e^{ix}(1+e^x)^{-i-1}}{\alpha!\, \beta! \dots \lambda!\, (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda},$$

où α, β, ..., λ représentent les solutions entières positives de l'équation:

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n;$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda.$$

Si l'on fait maintenant $x=0$, on trouve

$$y_0^{(n)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{n!\, i!}{2^{i+1} . \alpha!\, \beta! \dots \lambda!\, (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}.$$

---

[1] Voyez *Obras sobre Mathematica*, t. I, p. 213.

D'un autre côté, nous avons

$$y_0^{(2n-1)} = (-1)^n . \frac{2^{2n}-1}{2n} . B_{2n-1},$$

et par conséquent

$$\text{(1)} \qquad B_{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}-1} . \Sigma (-1)^{i-n} . \frac{i!}{2^{i-1} . \alpha! \beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (2n-1!)^\lambda},$$

étant

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + (2n-1)\lambda = 2n-1, \quad i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Nous avons donc une formule pour le calcul des nombres de Bernoulli. Cette formule fait encore voir *que le dénominateur des nombres de Bernoulli ne peut contenir d'autres facteurs premiers que 2 et ceux de $2^{2n}-1$, et que le facteur 2 ne peut pas y être élevé à une puissance supérieure à n.*

En effet, on voit au moyen de la théorie des dérivées d'ordre quelconque que la fonction numérique

$$\text{(2)} \qquad \frac{(2n-1)!}{\alpha! \beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (2n-1!)^\lambda}$$

donne un nombre entier toutes les fois que $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ représentent une solution quelconque de l'équation [1]

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + (2n-1)\lambda = 2n-1.$$

On peut encore envisager sous un autre point de vue, que nous ne ferons qu'indiquer ici, la formule (1). Elle établit une rélation entre les nombres de Bernoulli et les nombres (2), dont l'étude est importante, parce que ils entrent dans l'expression analytique des dérivées d'ordre quelconque qu'on vient d'appliquer pour déduire la formule (1).

2. Il est évident que chaque formule qui donne une expression de la dérivée d'ordre n d'une fonction, donne une expression correspondante des nombres de Bernoulli. Nous allons

---

[1] En effet, cette fonction numérique coïncide avec le coefficient du terme général de la formule qui donne $y^{(2n-1)}$, quand $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, démontrée dans le t. I, p. 213, de ces *Obras sobre Mathematica*, et l'analyse employée pour déduire cette formule fait voir que ce coefficient est un nombre entier.

donc employer à cette fin la formule [1]

$$y^{(n)} = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i!} f^{(i)}(u),$$

$$A_i = \frac{1}{n!} \left| (u^i)^{(n)} - \frac{i}{1} (u^{i-1})^{(n)} \cdot u + \frac{i(i-1)}{1.2} (u^{i-2})^{(n)} u^2 \ldots \right|,$$

où $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Étant

$$y = (1+e^x)^{-1} = u^{-1}, \quad u = 1+e^x,$$

nous avons

$$y^{(n)} = n! \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{A_i}{(1+e^x)^{i+1}},$$

où

$$A_i = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \cdot \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{k!} \left[(1+e^x)^{i-k}\right]^{(n)} \cdot (1+e^x)^k.$$

Il faut donc chercher la dérivée d'ordre n de $(1+e^x)^{i-k}$, ce qu'on peut faire au moyen de la formule de Leibnitz, qui donne

$$[(1+e^x)^{i-k}]^{(n)} = [(1+e^x)(1+e^x)\ldots]^{(n)} = \mathrm{S} \frac{n!}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} p_\alpha p_\beta \ldots p_\lambda,$$

où S représente la somme correspondante à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n,$$

le nombre des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ étant $i-k$, et où

$$p_0 = 1+e^x, \quad p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = e^x.$$

En posant $x = 0$, on trouve

$$y_0^{(n)} = n! \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{A_i}{2^{i+1}},$$

---

[1] C. Hermite: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 59.

où

$$\mathrm{A}_i = \sum_{k=0}^{k=i} (-1)^k . \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)2^k}{k!} \mathrm{S} \frac{p'_\alpha p'_\beta \cdots p'_\lambda}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},$$

et

$$p'_0 = 2, \quad p'_1 = p'_2 = p'_3 = \ldots = 1.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\mathrm{B}_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n-1}-1} y_0^{(2n-1)}.$$

Il vient donc

$$\mathrm{B}_{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}-1} \sum_{i=0}^{i=2n-1} (-1)^{n+i} . \frac{\mathrm{A}_i}{2^{i+1}}, \tag{3}$$

où

$$\mathrm{A}_i = \sum_{k=0}^{k=i} (-1)^k . \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)2^k}{k!} \mathrm{S} \frac{p'_\alpha p'_\beta \cdots p'_\lambda}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},$$

et

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = 2n - 1,$$

avec la condition de remplacer le facteur

$$\frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{k!}$$

par l'unité, quand $k = 0$.

3. Des expressions analogues à (1) et (3) représentent les coefficients du développement de $(1+e^x)^{-p}$ en série. Les résultats qu'on obtient en exprimant ces coefficients au moyen des nombres de Bernoulli sont bien moins simples.

En représentant par $\frac{\mathrm{C}_{2n-1}}{2n-1!}$ les coefficients du développement de $(1+e^x)^{-p}$, nous avons premièrement la formule

$$\mathrm{C}_{2n-1} = \Sigma (-1)^i . \frac{p(p+1)\ldots(p+i-1)(2n-1)!}{2^{i+p}\alpha!\beta!\ldots\lambda!(2!)^\beta\ldots(2n-1!)^\lambda},$$

où α, β, ..., λ représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + (2n-1)\lambda = 2n - 1,$$

et où

$$i=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda,$$

analogue à la formule (1); et ensuite la formule

$$C_{2n-1}=(2n-1)!\sum_{i=1}^{i=2n-1}(-1)^i.\frac{p(p+1)\ldots(p+i-1)A_i}{2^{i+1}.i!},$$

$$A_i=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k.\frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)2^k}{k!}\,S\,\frac{p_\alpha^{\alpha}p_\beta^{\beta}\cdots p_\lambda^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

laquelle est analogue à la formule (3).

4. Considérons maintenant les nombres d'Euler. On peut calculer ces nombres au moyen d'une formule analogue à la formule (1). En effet, l'expression analytique de la dérivée d'ordre n de $y=(\cos x)^{-1}$ par rapport à x est

$$y^{(n)}=\sum(-1)^i.\frac{n!\,i!\cos^\alpha\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos^\beta\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\ldots\cos^\lambda\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta(3!)^\gamma\ldots(n!)^\lambda\cos^{i+1}x}.$$

Nous avons donc

$$E_{2n}=\sum(-1)^i.\frac{(2n)!\,i!\cos^\alpha\frac{\pi}{2}\cos^\beta 2\frac{\pi}{2}\ldots\cos^\lambda 2n\frac{\pi}{2}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta(3!)^\gamma\ldots(2n!)^\lambda},$$

où α, β, ..., λ représentent toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+5\varepsilon+6\omega+\ldots+2n\lambda=2n$$

et où

$$i=\alpha+\beta+\ldots+\lambda;$$

ou

$$E_{2n}=\sum(-1)^{i+\beta+\omega+\ldots}\frac{(2n)!}{\beta!\,\delta!\,\omega!\ldots(2!)^\beta(4!)^\delta(6!)^\omega\ldots}, \tag{4}$$

où β, δ, ω, ... représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\beta+2\delta+3\omega+\ldots=n,$$

et où

$$i=\beta+\delta+\omega+\ldots$$

*

On peut aussi calculer les nombres d'Euler au moyen d'une formule analogue à (3). En effet, en posant

$$y = (\cos x)^{-1},$$

nous avons

$$E_{2n} = (2n)! \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i A_i$$

$$A_i = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k . \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{k!} S \frac{\cos \alpha \frac{\pi}{2} \cos \beta \frac{\pi}{2} \ldots \cos \lambda \frac{\pi}{2}}{\alpha ! \beta ! \ldots \lambda !},$$

où

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 2n,$$

α, β, ... ne devant recevoir que les valeurs paires.

5. Considérons maintenant la fonction dont M. Ely s'a occupé principalement, à savoir

$$y = (\cos x)^{-p},$$

pour la développer en série. Nous avons

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i . \frac{n! p(p+1)\ldots(p+i-1) \cos^\alpha \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^\beta \left(x + 2 \frac{\pi}{2}\right) \ldots \cos^\lambda \left(x + n \frac{\pi}{2}\right)}{\alpha ! \beta ! \ldots \lambda ! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda . \cos^{p+i} x},$$

et par conséquent, en représentant par C_{2n} le coefficient de $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ dans le développement considéré,

$$C_{2n} = \Sigma (-1)^i . \frac{(2n)! p(p+1)(p+2)\ldots(p+i-1) \cos^\alpha \frac{\pi}{2} \cos^\beta 2 \frac{\pi}{2} \ldots \cos^\lambda 2n \frac{\pi}{2}}{\alpha ! \beta ! \ldots \lambda ! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (2n!)^\lambda},$$

où

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + 2n\lambda = 2n, \quad i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda;$$

ou

$$C_{2n} = \Sigma (-1)^{i+\beta+\omega+\ldots} \frac{(2n)! p(p+1)\ldots(p+i-1)}{\beta ! \delta ! \omega ! \ldots (2!)^\beta (4!)^\delta (6!)^\omega \ldots},$$

où, comme précédemment

$$\beta + 2\delta + 3\omega + \ldots = n, \quad i = \beta + \delta + \omega + \ldots$$

Cette formule va nous conduire à un résultat important.

En y posant $p = p' + 1$ et remarquant que, comme nous avons déjà dit,

$$\frac{(2n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}\ldots(2n!)^{\lambda}}$$

est un nombre entier et que

$$p(p+1)\ldots(p+i-1) = (p'+1)(p'+2)\ldots(p'+i) = \text{multiple de } p' + 1\cdot 2\ldots i,$$

nous avons

$$C_{2n} = \text{multiple de } p' + E_{2n},$$

ou le théorème:

$$C_{2n} \equiv E_{2n} \pmod{= p-1}. \tag{5}$$

De cette congruence il résulte que le théorème de Lucas, à savoir

$$E_{2n} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} E_{2n+p-1} \pmod{= p},$$

où p est un nombre premier, a aussi lieu pour les coefficients C_{2n}, c'est-à-dire que

$$C_{2n} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} . C_{2n+p-1},$$

C_{2n} et C_{2n+p-1} étant les coefficients du développement de $(\cos x)^{-(p+1)}$.

De la formule (5) et de la formule (11) de la mémoire de M. Ely on tire la congruence:

$$\frac{1}{(p-1)!}\left[S_t E_{2n} + S_{t-1} E_{2n+2} + \ldots + S_1 E_{2n+p-3} + E_{2n+p-1}\right] \equiv E_{2n},$$

où S_t représente la somme des combinaisons des nombres $1^2, 3^2, \ldots, (p-2)^2$, pris n à n, et où $t = \frac{p-1}{2}$.

VIII

SUR LA SÉRIE DE LAGRANGE ET SES APPLICATIONS

(Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Classe des Sciences. Bruxelles, 1904)

SUR LA SÉRIE DE LAGRANGE ET SES APPLICATIONS.

1. Soient données les équations

$$u = f(y),$$

$$y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^k\varphi_k(y).$$

La fonction u, qu'elles définissent, peut être développée en série dont les termes sont des fonctions entières, déterminées, de x, au moyen de la formule de Lagrange, quand sont satisfaites quelques conditions bien connues; et de ce développement on peut déduire un autre, ordonné suivant les puissances entières et positives de x, que nous avons indiqué dans deux travaux publiés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (3.e série, t. VII, et 4.e série, t. V) (1).

Les formules dont on vient de faire mention sont applicables au développement des fonctions algébriques, comme l'a fait voir M. David dans un mémoire important, publié dans le *Journal de l'École polytechnique de Paris* (cahier LVII, 1887), où il a fait voir qu'elles donnent le développement de la fonction $f(y)$ de la racine y de l'équation algébrique $F(x, y) = 0$, que prend la valeur y_1, quand $x = x_1$, en série convergente dans le voisinage de x_1, quand sont satisfaites quelques conditions qu'il détermina. Mais M. David n'y a pas considéré que le cas où y_1 est une racine *simple* de l'équation $F(x_1, y) = 0$; et les conditions qu'il a trouvé sont, en général, d'une application difficile, et il faut, dans la plupart des cas, les remplacer par autres, moins générales, mais plus simples.

---

(1) Voir: *Obras sobre Mathematica*, t. I, p. 221 e 229.

C'est cette question du développement des fonctions algébriques que nous allons considérer dans la première partie de ce travail. Nous y considérons non seulement le cas, étudié par M. David, où y_1 est une racine *simple* de $F(x_1, y) = 0$, mais encore quelques autres dans lesquels y_1 est une racine *multiple* de cette équation, et nous y cherchons des conditions pour la convergence des séries considérées, qui, n'étant pas nécessairement les plus générales et ne donnant pas la plus grande aire où cette convergence ait lieu, soient de facile application.

La question qu'on vient d'indiquer est celle que nous avons principalement en vue dans ce travail. Mais nous profitons de cette occasion pour donner, dans la deuxième partie, quelques développements particuliers, qui résultent des formules précédemment rapportées, et, dans la troisième partie, quelques représentations des coefficients de ces formules-ci.

I.

Sur l'application de la formule de Lagrange au développement des fonctions algébriques.

2. Soient $f(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\ldots$, $\varphi_k(z)$ des fonctions holomorphes dans une aire A, limitée par un contour K, et soit t l'affixe d'un point de son intérieur.

En appliquant la série de Lagrange à la fonction u, définie par les équations

$$u = f(z), \quad z = t + x\,\mathrm{F}(z), \tag{1}$$

où

$$\mathrm{F}(z) = \varphi_1(z) + x\,\varphi_2(z) + x^2\varphi_3(z) + \ldots + x^{k-1}\varphi_k(z), \tag{2}$$

on trouve premièrement

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}\{f'(t)[\mathrm{F}(t)]^n\}}{dt^{n-1}} + \mathrm{R}_m,$$

où

$$\mathrm{R}_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{K}} \frac{x^{m+1}[\mathrm{F}(z)]^{m+1} f(z)[1 - x\,\mathrm{F}'(z)]}{(z-t)^{m+2}\left[1 - \dfrac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right]}\,dz;$$

et, en ayant égard à l'inégalité

$$|\mathrm{R}_m| < \frac{\sigma}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{M}^{m+1}\mathrm{M}_1}{1-\mathrm{M}},$$

où M et M_1 représentent respectivement les plus grandes valeurs que prennent

$$\left|\frac{x\,\mathrm{F}(z)}{z-t}\right|, \quad \left|\frac{f(z)}{z-t}\right| \, |1 - x\,\mathrm{F}'(z)|,$$

quand z décrit le contour K, et σ la longueur de ce contour, on trouve ensuite le développement

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}\{f'(t)[F(t)]^n\}}{dt^{n-1}}, \tag{3}$$

quand $M<1$, et, par conséquent, quand on a pour tout point z de K,

$$\left|\frac{x\varphi_1(z)+x^2\varphi_2(z)+\ldots}{z-t}\right|<1. \tag{4}$$

Le développement qu'on vient d'écrire est *uniformement* convergent dans une aire B où soient représentées les valeurs de x qui satisfont à cette condition. En effet, en représentant par P et Q les plus grandes valeurs que prennent M et M_1 dans l'aire B, ou a l'inégalité

$$|R_m|<\frac{\sigma}{2\pi}\cdot\frac{P^{m+1}Q}{1-P},$$

dont le second membre est indépendant de x et tend vers zéro, pour $m=\infty$.

3. Les termes de la série (3) sont des fonctions entières de x, et il résulte d'un théorème bien connu qu'on doit à Weierstrass [1], qu'on en peut tirer une autre ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, convergente pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire d'un cercle qu'ait le centre dans l'origine des coordonnées et qui ne coupe pas le contour de l'aire B.

On trouve de cette manière, comme nous l'avons déjà fait voir dans une note publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (4.e série, t. v, p. 67) [2], le développement suivant:

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Sigma'\frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\cdot\frac{d^{b-1}\{f'(t)[\varphi_1(t)]^{\alpha}[\varphi_2(t)]^{\beta}\ldots[\varphi_k(t)]^{\lambda}\}}{dt^{b-1}}, \tag{5}$$

où la somme Σ' se rapporte à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+k\lambda=n,$$

et où

$$b=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

---

(1) *Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880.

(2) *Obras sobre Mathematica,* t. I, p. 232.

Il convient de remarquer que dans ce qui précède k peut être égal à l'infini, si la série qui alors entre dans le second membre de (2) représente une fonction holomorphe de x et z dans l'aire A, pour ce qui concerne z, et dans l'aire B, pour ce qui concerne x.

4. Cela posé, nous allons étudier la condition (4).

Supposons que le contour de l'aire A soit une circonférence de rayon égal à R ayant son centre dans le point d'affixe t, et qu'il soit

$$z - t = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad x = r(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Si à une valeur particulière donnée à ρ correspond une autre, r_1, pour r, telle que l'inégalité (4) soit satisfaite par toutes les valeurs de θ et ω, comprises entre 0 et 2π, et par celles de r inférieures à r_1, la formule (5) est applicable à toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire du cercle de rayon égal à r_1, ayant le centre dans l'origine des coordonnées.

Pour obtenir le plus grand cercle qui satisfait à ces conditions, il faut chercher d'abord la plus grande valeur que prend le premier membre de l'inégalité (4), quand θ varie depuis 0 jusqu'à 2π, et la valeur correspondante de z, que nous représenterons par z', laquelle dépend de r, ω et ρ; il faut chercher ensuite la plus petite valeur, r', que prend la fonction r, définie par l'équation

$$\left|\frac{x\varphi_1(z') + x^2\varphi_2(z') + \dots}{z' - t}\right| = 1,$$

quand ω varie depuis 0 jusqu'à 2π; et il faut chercher enfin la plus grande valeur, η, que prend r' quand ρ varie depuis 0 jusqu'à R. Alors η est le rayon du cercle demandé.

On voit par ce qui précède que la détermination de η au moyen de (4) n'est pas, en général, facile, à cause de la complexité des conditions auxquelles doivent satisfaire les quatre variables qui y entrent. On peut même trouver dans la résolution de ce problème des difficultés insurmontables, et il faut alors se contenter de la connaissance d'un cercle de convergence, pour la série (5), de rayon plus petit que ce nombre-là, ce qui est d'ailleurs suffisant en beaucoup de questions; et, pour le déterminer, on peut employer l'inégalité

$$r\left|\frac{\varphi_1(z)}{z-t}\right| + r^2\left|\frac{\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \dots < 1, \tag{6}$$

qui résulte de (4) et de la suivante:

$$\left|\frac{x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \dots}{z-t}\right| < \left|\frac{x\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{x^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \dots$$

L'inégalité (6) est bien plus simple que (4), parce qu'elle ne contient pas ω; mais elle est encore, en général, difficile d'appliquer, et il faut donc la remplacer, en beaucoup de cas, par quelque autre plus simple. Nous donnerons bientôt, pour le cas des fonctions algébriques, qui sont celles dont le développement nous avons ici principalement en vue, une condition, qui résulte de la précédente et qui est facile d'appliquer.

5. Dans le cas important où les équations (1) se réduisent aux suivantes:

$$u = f(z), \quad z = t + x\,\varphi_1(z) + x^2\,\varphi_2(z),$$

les conditions (4) et (6) mènent au même résultat.

En effet, alors la condition (4) se réduit à la suivante:

$$\left| \frac{x\,\varphi_1(z) + x^2\,\varphi_2(z)}{z - t} \right| < 1.$$

Mais, en posant

$$\frac{\varphi_1(z)}{z - t} = \rho_1(\cos a + i \sin a),$$

$$\frac{\varphi_2(z)}{z - t} = \rho_2(\cos b + i \sin b),$$

$$x = r(\cos \omega + i \sin \omega),$$

on trouve

$$\left| \frac{x\,\varphi_1(z) + x^2\,\varphi_2(z)}{z - t} \right| = r\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 r^2 - 2\,r\,\rho_1\,\rho_2 \cos(a - b - \omega)}.$$

Donc la plus grande valeur que prend le premier membre de cette identité, pour chaque valeur de z, correspond à $\omega = b - a$, et est, par conséquent, égale à

$$r(\rho_1 + \rho_2 r),$$

ou

$$\left| \frac{r\,\varphi_2(z)}{z - t} \right| + \left| \frac{r^2\,\varphi_1(z)}{z - t} \right|;$$

et en résulte que la plus grande valeur qu'il prend, quand z décrit le contour de A, est égale à la plus grande valeur que alors prend cette dernière expression.

On voit donc que, dans le cas particulier que nous venons de considérer, on peut employer la condition (6) pour déterminer la valeur de r_1.

6. Nous allons maintenant appliquer la doctrine antérieure aux fonctions algébriques. Soit y une fonction algébrique de x définie par l'équation

$$f_1(x, y) = 0, \tag{7}$$

et (x_1, y_1) un système de valeurs qui lui satisfasse; et supposons qu'on veuille développer la branche y de cette fonction qui prend la valeur y_1, quand on donne à x la valeur x_1, ou $f(y)$, en série convergente dans un certain cercle ayant le centre dans le point d'affixe x_1. Supposons encore, premièrement, que y_1 soit une racine simple de l'équation $f_1(x_1, y) = 0$.

Cela posé, si l'on remplace dans l'équation (7) x par $x - x_1$ et y par $y - y_1$, on la réduit à la forme

$$\begin{aligned} A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_m y^m + \ldots - x\,(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} y + A_2^{(1)} y^2 + \ldots) \\ - x^2 (A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y + A_2^{(2)} y^2 + \ldots) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

où, par hypothèse, A_1 est different de zéro; ou

$$y = x\varphi_1(y) + x^2 \varphi_2(y) + x^3 \varphi_3(y) + \ldots,$$

où

$$\varphi_1(y) = \frac{A_0^{(1)} + A_1^{(1)} y + A_2^{(1)} y^2 + \ldots}{A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + \ldots},$$

$$\varphi_2(y) = \frac{A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y + A_2^{(2)} y^2 + \ldots}{A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + \ldots},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'équation qu'on vient d'obtenir a la forme considérée dans le n.º 2, et on peut, par conséquent, développer y ou $f(y)$ au moyen de la série de Lagrange, ou au moyen de la formule (5), si l'on veut trouver un développement ordonné suivant les puissances de x.

Pour étudier la convergence de la série qui alors résulte de (5), remarquons que l'inégalité (6) donne dans ce cas

$$\left| \frac{r(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} y + \ldots)}{y(A_1 + A_2 y + \ldots)} \right| + \left| \frac{r^2 (A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y + \ldots)}{y(A_1 + A_2 y + \ldots)} \right| + \ldots < 1,$$

et que cette inégalité est satisfaite quand

$$\frac{r\left\{ |A_0^{(1)}| + |A_1^{(1)}|\,|y| + \ldots + r\left[|A_0^{(2)}| + |A_1^{(2)}|\,|y| + \ldots \right] + \ldots \right\}}{|y|\left\{ |A_1| - |A_2|\,|y| - |A_3|\,|y|^2 - \ldots \right\}} < 1,$$

et

$$|A_1| > |A_2||y| + |A_3||y|^2 + \dots$$

Si l'on détermine deux nombres r_1 et ρ tels que ces deux inégalités soient satisfaites lorsque $r = r_1$ et $|y| = \rho$, les mêmes inégalités sont satisfaites quand $r < r_1$, et les formules (3) et (5) sont valables pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire du cercle de rayon égal à r_1, ayant le centre dans l'origine des coordonnées.

Pour trouver le cercle plus grand que ces inégalités peuvent donner, il faut chercher la valeur de ρ qui rend maximum la valeur de r donnée par l'équation

$$\frac{r\{|A_0^{(1)}| + |A_1^{(1)}|\rho + \dots + r[|A_0^{(2)}| + |A_1^{(2)}|\rho + \dots] + \dots\}}{\rho\{|A_1| - |A_2|\rho - \dots\}} = 1,$$

et satisfait à la condition

$$|A_1| > |A_2|\rho + |A_3|\rho^2 + \dots$$

La valeur de r correspondante est le rayon du cercle demandé.

L'inégalité qui précède ne donne pas, en général, le plus grand cercle dans le quel la série (5) est convergente, mais elle est de facile application et peut donc être utile en beaucoup d'occasions.

7. Nous avons supposé dans ce qui précède que A_1 est différent de zéro. Supposons maintenant qu'on a

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots, \quad A_{m-1} = 0,$$

et que A_m est différent de zéro.

Il vient dans ce cas

$$y = x^{\frac{1}{m}} [\psi_1(y) + x\psi_2(y) + x^2\psi_3(y) + \dots]^{\frac{1}{m}},$$

où

$$\psi_1(y) = \frac{A_0^{(1)} + A_1^{(1)} y + A_2^{(1)} y^2 + \dots}{A_m + A_{m+1} y + A_{m+2} y^2 + \dots},$$

$$\psi_2(y) = \frac{A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y + A_2^{(2)} y^2 + \dots}{A_m + A_{m+1} y + A_{m+2} y^2 + \dots},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ou, en posant $x^{\frac{1}{m}} = v\varepsilon_m$,

$$y = \varepsilon_m v \left[\psi_1(y) + v^m \psi_2(y) + v^{2m} \psi_3(y) + \dots\right]^{\frac{1}{m}},$$

où l'on représente par ε_m une quelconque des racines de l'équation $\zeta^m = 1$.

On peut appliquer à cette équation la formule (3), en y posant

$$t = 0, \quad F(y, v) = \varepsilon_m \left[\psi_1(y) + v^m \psi_2(y) + v^{2m} \psi_3(y) + \dots\right]^{\frac{1}{m}},$$

et l'on obtient un développement convergent applicable à toutes les valeurs de v représentées par les points d'une aire B, quand on a, pour toutes ces valeurs de v et pour toutes les valeurs de y représentées par les points d'une aire A,

$$(7) \qquad \begin{cases} \left|A_0^{(1)} + A_1^{(1)} y + A_2^{(1)} y^2 + \dots + v^m \left[A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y + \dots\right] + \dots\right| > 0, \\ \left|A_m + A_{m+1} y + A_{m+2} y^2 + \dots\right| > 0 \end{cases}$$

et, pour toutes les valeurs de y représentées par les points du contour de A,

$$\frac{|v| \left|\left[\psi_1(y) + v^m \psi_2(y) + \dots\right]^{\frac{1}{m}}\right|}{|y|} < 1.$$

Dans ce cas $F(y, v)$ est, en effet, une fonction holomorphe de y dans l'aire A, x étant l'affixe d'un point quelconque de l'aire B, et l'inégalité (4) est satisfaite.

La détermination d'une aire où soient représentées toutes les valeurs de v qui satisfont aux conditions précédentes n'est pas, en général, facile; mais de ces inégalités, on peut en déduire de plus simples, qui déterminent une partie de cette aire.

En effet, la dernière inégalité peut être remplacée par la suivante:

$$\frac{|v|^m \left|\psi_1(y) + v^m \psi_2(y) + \dots\right|}{|y|^m} < 1,$$

qui est satisfaite par les valeurs de y et v, qui satisfont à la suivante:

$$\frac{|v|^m \left\{|A_0^{(1)}| + |A_1^{(1)}| |y| + \dots + |v|^m \left[|A_0^{(2)}| + |A_1^{(2)}| |y| + \dots\right] + \dots\right\}}{|y|^m \left|A_m + A_{m+1} y + \dots\right|} < 1.$$

Mais on a

$$|A_m + A_{m+1} y + \dots| > |A_m| - |A_{m+1}| |y| - \dots$$

Donc, pour que l'inégalité considérée ait lieu, il suffit qu'on ait

$$(8) \qquad |A_m| > |A_{m+1}|\,|y| + |A_{m+2}|\,|y|^2 + \ldots,$$

$$(9) \qquad \frac{|v|^m \{ |A_0^{(1)}| + |A_1^{(1)}|\,|y| + \ldots + |v|^m [\,|A_0^{(2)}| + |A_1^{(2)}|\,|y| + \ldots] + \ldots \}}{|y|^m \{ |A_m| - |A_{m+1}|\,|y| - |A_{m+2}|\,|y|^2 - \ldots \}} < 1.$$

Considérons maintenant les inégalités (7). Pour qu'elles aient lieu, il suffit qu'on ait

$$(10) \qquad \left| \frac{A_1^{(1)} y + A_2^{(1)} y^2 + \ldots + v^m [A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y + \ldots] + \ldots}{A_0^{(1)}} \right| < 1$$

e

$$|A_m| > |A_{m+1}|\,|y| + |A_{m+2}|\,|y|^2 + \ldots,$$

et, par conséquent, elles sont satisfaites par les valeurs de y et v qui satisfont à cette dernière inégalité et à la suivante:

$$(11) \qquad \frac{|A_1^{(1)}|\,|y| + |A_2^{(1)}|\,|y|^2 + \ldots + |v|^m [\,|A_0^{(2)}| + |A_1^{(2)}|\,|y| + \ldots] + \ldots \}}{|A_0^{(1)}|} < 1.$$

Si l'on détermine donc deux nombres η et ρ tels que les inégalités (8), (9), (11) soint satisfaites quand $|v| = \eta$ et $|y| = \rho$, les inégalités (8) et (11) sont aussi satisfaites quand $|v| < \eta$ et $|y| < \rho$, et l'inégalité (9) quand $|v| < \eta$.

On peut donc développer $f(y)$ au moyen de la formule

$$(12) \qquad f(y) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1} \{ f'(t) [F(t, v)]^n \}}{dt^{n-1}} \right]_0,$$

quand v est l'affixe d'un point quelconque de l'aire du cercle de rayon égal à η, ayant le centre dans l'origine des coordonnées.

8. On peut déduire du développement qu'on vient de trouver un autre ordonné suivant les puissances entières et positives de v. En effet, puisque l'inégalité (10) est satisfaite, la fonction $F(y, v)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de

$$\frac{A_1^{(1)} y + A_2^{(1)} y^2 + \ldots + v^m [A_0^{(2)} + A_1^{(2)} y + \ldots] + \ldots}{A_0^{(1)}},$$

et cette série est uniformément convergente dans le cercle de rayon égal à η, ayant le centre dans l'origine des coordonnées, quand y représente un point du cercle de rayon égal à ρ,

ayant le centre dans le même point. On en conclut, au moyen d'un théorème de Weierstrass précédemment rapporté, que $F(y, v)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de v, convergente dans le cercle de rayon η considéré. On trouve ainsi un développement de la forme suivante

$$y = \varepsilon_m v \,[\varphi_0(y) + \varphi_m(y)\, v^m + \varphi_{2m}(y)\, v^{2m} + \dots],$$

auquel on peut appliquer la formule (5), qui donne

$$(13) \qquad f(y) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_m^n v^n \Sigma' \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots} \left[\frac{d^{b-1} \{ f'(t)\,[\varphi_0(t)]^{\alpha}\,[\varphi_m(t)]^{\beta}\dots \}}{dt^{b-1}} \right]_0,$$

où la somme Σ' se rapporte à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + (m+1)\beta + (2m+1)\gamma + \dots = n,$$

et où

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

On peut encore écrire les formules qu'on vient de trouver de la manière suivante:

$$f(y) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m^n x^{\frac{n}{m}}}{n!} \left[\frac{d^{n-1} \{ f'(t)\,[F_1(t)]^n \}}{dt^{n-1}} \right]_0,$$

et

$$f(y) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_m^n x^{\frac{n}{m}} \Sigma \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots} \left[\frac{d^{b-1} \{ f'(t)\,[\varphi_1(t)]^{\alpha}\,[\varphi_2(t)]^{\beta}\dots \}}{dt^{b-1}} \right]_0,$$

où

$$F_1(t) = \psi_1(t) + x\,\psi_2(t) + x^2\,\psi_3(t) + \dots$$

et

$$x^{\frac{n}{m}} = r^{\frac{n}{m}} \left(\cos \frac{n}{m}\,\omega + i \sin \frac{n}{m}\,\omega \right).$$

Chacune de ces formules donne pour $f(y)$ m valeurs différentes, qui correspondent aux m valeurs de ε_m, et elles sont valables pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire d'un cercle de rayon égal à η^m, ayant le centre dans l'origine des coordonnées.

9. Soient

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$$

les m valeurs de y qui correspondent aux m valeurs de ε_m,

La formule (12) donne

$$f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_m)=mf(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}\{f'(t)(\varepsilon_1^n+\varepsilon_2^n+\ldots)[F_1(t,v)]^n\}}{dt^{n-1}}\right]_0,$$

où

$$F_1(t,v)=[\psi_1(t)+v^m\psi_2(t)+\ldots]^{\frac{1}{m}}.$$

Mais on a

$$\varepsilon_1^n+\varepsilon_2^n+\varepsilon_3^n+\ldots+\varepsilon_m^n=0,$$

quand le nombre n n'est pas divisible par m, et

$$\varepsilon_1^n+\varepsilon_2^n+\varepsilon_3^n+\ldots+\varepsilon_m^n=\frac{n}{i},$$

quand $n=m.i$, i représentant un nombre entier.

Donc

$$f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_m)=mf(0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{v^{mi}}{i(mi-1)!}\cdot\left[\frac{d^{mi-1}\{f'(t)[\psi_1(t)+v^m\psi_2(t)+\ldots]^i\}}{dt^{mi-1}}\right]_0,$$

ou, par conséquent,

$$f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_m)=mf(0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i(mi-1)!}\cdot\left[\frac{d^{mi-1}\{f'(t)[\psi_1(t)+x\psi_2(t)+\ldots]^i\}}{dt^{mi-1}}\right]_0.$$

Cette formule s'accorde avec une donnée par M. Rouché dans l'important mémoire sur la série de Lagrange qu'il a publié dans le *Journal de l'École Polytechnique de Paris* (cahier XXXIX, p. 223).

10. On peut déduire facilement de la formule qu'on vient d'obtenir un développement ordonné suivant les puissances entières et positives de x.

En effet, en développant la puissance i du polynôme qui y entre, on peut écrire son terme général de la manière suivante:

$$\frac{x^i}{i(mi-1)!}\left[\frac{d^{mi-1}}{dt^{mi-1}}\sum\left\{\frac{i!\,f'(t)[\psi_1(t)]^{\alpha}[\psi_2(t)]^{\beta}\ldots}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}x^{\beta+2\gamma+\ldots}\right\}\right]_0,$$

où la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=i;$$

ou

$$\frac{(i-1)!}{(mi-1)!}\left[\frac{d^{mi-1}}{dt^{mi-1}}\sum\frac{f'(t)[\varphi_1(t)]^{\alpha}[\varphi_2(t)]^{\beta}\ldots}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}x^{\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots}\right]_0.$$

Donc on a la formule demandée

$$f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_m)=mf(0)+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum'\frac{(i-1)!}{(mi-1)!}\left[\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\cdot\frac{d^{mi-1}\{f'(t)[\varphi_1(t)]^{\alpha}[\varphi_2(t)]^{\beta}\ldots\}}{dt^{mi-1}}\right]_0,$$

où la somme Σ' se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+n\lambda=n,$$

et où

$$i=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

11. L'analyse employée dans le n.° 7 n'est pas applicable quand $A_0^{(1)}=0$. Mais on peut la généraliser et l'étendre au cas où l'équation proposée a la forme suivante:

$$\begin{aligned}A_m y^m+A_{m+1}y^{m+1}+A_{m+2}y^{m+2}+\ldots+x^k(A_0^{(k)}+A_1^{(k)}y+A_2^{(k)}y^2+\ldots)&\\+x^{k+1}(A_0^{(k+1)}+A_1^{(k+1)}y+A_2^{(k+1)}y^2+\ldots)&\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&=0,\end{aligned}$$

$A_0^{(k)}$ étant une quantité différente de zéro

Dans ce cas, on a

$$y=x^{\frac{k}{m}}\left[\varphi_1(y)+x\varphi_2(y)+x^2\varphi_3(y)+\ldots\right]^{\frac{1}{m}},$$

où

$$\varphi_1(y)=\frac{A_0^{(k)}+A_1^{(k)}y+A_2^{(k)}y^2+\ldots}{A_m+A_{m+1}y+A_{m+2}y^2+\ldots},$$

$$\varphi_2(y)=\frac{A_0^{(k+1)}+A_1^{(k+1)}y+A_2^{(k+1)}y^2+\ldots}{A_m+A_{m+1}y+A_{m+2}y^2+\ldots},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou, en posant $x^{\frac{1}{m}} = \varepsilon_m v$,

$$y = \varepsilon_m^k v^k \left[\psi_1(y) + v^m \psi_2(y) + \ldots\right]^{\frac{1}{m}}.$$

On peut donc appliquer la formule de Lagrange, en y posant

$$t = 0, \quad F(y, v) = \varepsilon_m^k v^{k-1} \left[\psi_1(y) + v^m \psi_2(y) + v^{2m} \psi_3(y) + \ldots\right]^{\frac{1}{m}},$$

quand on a, pour toutes les valeurs de v représentées par les points d'une aire B et pour toutes les valeurs de y représentées par ceux d'une aire B

$$|A_1^{(k)} y + A_2^{(k)} y^2 + \ldots + v^m [A_0^{(k+1)} + A_1^{(k+1)} y + \ldots] + \ldots| > 0,$$

$$|A_m + A_{m+1} y + A_{m+2} y^2 + \ldots| > 0,$$

et, pour toutes les valeurs de z représentées par un point du contour de B,

$$\frac{|v^{k-1}| \, |\psi_1(y) + v^m \psi_2(y) + \ldots|^{\frac{1}{m}}}{|y|} < 1.$$

De ces inégalités, on peut déduire, comme dans le cas considéré dans le n.º 7, des autres plus simples, et du développement de $f(y)$, que donne la formule de Lagrange, on peut déduire un autre ordonné suivant les puissances de v.

II.

Sur quelques développements particuliers qui résultent des formules (3) et (5).

12. Nous allons maintenant déduire des formules (3) et (5) quelques développements particuliers.

Considérons premièrement la fonction u definie par les équations

$$u = f(z),$$

$$z = t + \{x\varphi(z) + x^2[\varphi(z)]^2 + x^3[\varphi(z)]^3 + \dots\}\psi(z) = t + \frac{x\varphi(z)\psi(z)}{1 - x\varphi(z)},$$

où $|x| < 1$ et $|\varphi(z)| < 1$.

En appliquant la formule (5), on trouve

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum' \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!} \frac{d^{b-1}\{f'(t)[\varphi(t)]^n[\psi(t)]^b\}}{dt^{b-1}},$$

où la somme Σ' se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n,$$

et où

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda;$$

ou

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{b=1}^{n} A_b \frac{d^{b-1}\{f'(t)[\varphi(t)]^n[\psi(t)]^b\}}{dt^{b-1}}, \tag{14}$$

où A_b représente la somme de toutes les valeurs que prend l'expression

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots\lambda!}$$

quand on remplace α, β, ..., λ par les racines entières, positives et nulles, des équations

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n, \quad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = b.$$

En employant maintenant l'identité connue, dont nous donnerons bientôt une démonstration,

$$A_b = \frac{(n-1)!}{(b-1)!} \binom{n}{b},$$

où

$$\binom{n}{b} = \frac{n(n-1)\ldots(n-b+1)}{1.2\ldots b},$$

on trouve enfin

$$(15) \qquad f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{(b-1)!} \binom{n}{b} \frac{d^{b-1} \{ f'(t) [\varphi(t)]^n [\psi(t)]^b \}}{dt^{b-1}}.$$

Nous allons déduire quelques conséquences de cette formule.

1.° Soit

$$\varphi(z) = 1, \quad \psi(z) = z^2 - 1, \quad f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1-z}{1+z}.$$

On trouve alors le développement

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{(b-1)!} \binom{n}{b} \frac{d^{b-1} (t^2-1)^{b-1}}{dt^{b-1}},$$

que, en employant la formule de Jacobi,

$$X_{b-1}(t) = \frac{1}{(b-1)!\, 2^{b-1}} \cdot \frac{d^{b-1} (t^2-1)^{b-1}}{dt^{b-1}},$$

où $X_{b-1}(t)$ représente le *polynôme de Legendre* du degré $b-1$, on peut réduire à la forme suivante:

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} \binom{n}{b} 2^{b-1} X_{b-1}(t).$$

Dans le cas particulier où $t = 0$, on a $X_0(t) = 1$, $X_{b-1}(t) = 0$, quand b est un nombre *pair*, et

$$X_{b-1}(t) = (-1)^{\frac{b-1}{2}} \frac{1.3.5\ldots(b-2)}{2.4.6\ldots(b-1)},$$

quand b est un nombre *impair*. En posant alors

$$b = 2m - 1, \quad \frac{n-1}{2} = m_1,$$

on trouve

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \left\{ 1 + \sum_{m=2}^{m_1} (-1)^{m-1} \binom{n}{2m-1} \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{(m-1)!} 2^{m-1} \right\}.$$

Il est facile de voir que, dans le cas que nous considérons à présent, on a

$$f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{3x - 1 + \sqrt{(5+4t)x^2 - 2(1+2t)x + 1}}{x + 1 - \sqrt{(5+4t)x^2 - 2(1+2t)x + 1}}.$$

et, quand $t = 0$,

$$f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{3x - 1 + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{x + 1 - \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}.$$

Les formules qu'on vient de trouver donnent donc les développements de ces fonctions en série ordonnée suivant les puissances de x.

2.° Supposons maintenant

$$\varphi(z) = 1, \quad \psi(z) = 1 - z^2, \quad f(z) = \text{arc sen}\, z.$$

Il vient alors la formule

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{(b-1)!} \binom{n}{b} \frac{d^{b-1}(1-t^2)^{b-\frac{1}{2}}}{dt^{b-1}},$$

qui, à cause de l'identité connue

$$\frac{d^{b-1}(1-t^2)^{b-\frac{1}{2}}}{dt^{b-1}} = (-1)^{b-1} \frac{1.3\ldots(2b-1)}{b} \sin b \arccos t,$$

donne

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} (-1)^{b-1} \frac{1.3\ldots(2b-1)}{b!} \binom{n}{b} \sin b \arccos t.$$

Quand $t = 0$, il vient

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} \frac{1.3.5\ldots(2b-1)}{b!} \binom{n}{b}.$$

Les formules précédentes donnent les développements des fonctions

$$\arcsin \frac{1 - x - \sqrt{(5 + 4t)x^2 - 2(1 + 2t)x + 1}}{2x}$$

et

$$\arcsin \frac{1 - x - \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{2x}$$

en série ordonnée suivant les puissances de x.

3.° Soit maintenant

$$\varphi(z) = 1, \quad \psi(z) = e^z, \quad f(z) = z.$$

Il vient alors, en appliquant la formule (3) à la fonction z définie par l'équation

$$z = t + x(e^z + z - t),$$

le développement suivant:

$$z = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}(e^z + z - t)^n}{dz^{n-1}} \right]_{z=t}.$$

Mais on a

$$(e^z + z - t)^n = \sum_{b=0}^{n} \binom{n}{b} (z-t)^{n-b} e^{bz} = \sum_{b=0}^{n} \binom{n}{b} (z-t)^{n-b} e^{bt} e^{b(z-t)},$$

et, par conséquent, en développant le second membre de cette identité suivant les puissances de $z - t$,

$$(e^z + z - t)^n = \sum_{b=0}^{n} \binom{n}{b} e^{bt} (z-t)^{n-b} \left\{ 1 + b(z-t) + \frac{b^2(z-t)^2}{2!} + \frac{b^3(z-t)^3}{3!} + \ldots \right\}.$$

Donc

$$\left(\frac{d^{n-1}(e^z + z - t)}{dz^{n-1}} \right)_t = \sum_{b=1}^{n} \binom{n}{b} \frac{(n-1)!}{(b-1)!} b^{b-1} e^{bt},$$

et, par conséquent,

$$z = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} \binom{n}{b} \frac{1}{(b-1)!} b^{b-1} e^{bt}.$$

Mais, d'un autre côté, la formule (14) donne

$$z = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{b=1}^{n} A_b e^{b-1} e^{bt}.$$

En comparant ces deux resultats, on trouve la rélation que nous avons employée précédemment

$$A_b = \frac{(n-1)!}{(b-1)!} \binom{n}{b}.$$

4.° Soit enfin

$$\varphi(z) = z, \quad \psi(z) = 1, \quad f(z) = z.$$

Il vient alors

$$z = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{b=1}^{n} \binom{n}{b-1} \binom{n}{b} t^{n-b+1}.$$

Cette formule donne le développement de la racine de l'équation du deuxième degré

$$x z^2 + (x - t x - 1) z + t = 0$$

qui se réduit à t quand $x = 0$.

13. Considérons maintenant la fonction u définie par les équations

$$u = f(z),$$

$$z = t + \left\{ x \varphi(z) + \frac{1}{2!} x^2 [\varphi(z)]^2 + \frac{1}{3!} x^3 [\varphi(z)]^3 + \ldots \right\} \psi(z) = t + (e^{x\varphi(z)} - 1) \psi(z).$$

La formule (5) donne alors

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \Sigma' \frac{1}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda} \frac{d^{b-1} \{ f'(t) [\varphi(t)]^n [\psi(t)]^b \}}{dt^{b-1}},$$

où Σ' se rapporte aux solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n,$$

et où

$$b = \alpha + \beta + \ldots + \lambda;$$

ou, par conséquent,

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{b=1}^{n} S_b \frac{d^{b-1} \{ f'(t) [\varphi(t)]^n [\psi(t)]^b \}}{dt^{b-1}},$$

où S_b représente la somme des valeurs que prend l'expression

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}}$$

quand α, β, ..., λ sont remplacées par les racines entières, positives et nulles, des équations

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+n\lambda=n, \quad \alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=b.$$

Mais, en appliquant à la fonction $(e^x-1)^b$ une formule connue qui donne les dérivées des fonctions de fonction, on trouve

$$S_b=\frac{1}{b!}\left[\frac{d^n(e^x-1)^b}{dx^n}\right]_0,$$

et, par conséquent,

$$S_b=\frac{1}{b!}\left[b^n-b(b-1)^n+\binom{b}{2}(b-2)^n-\ldots\pm\binom{b}{b-1}1^n\right],$$

ou, en employant la notation des différences finies,

$$S_b=\frac{1}{b!}\Delta^b 0^n.$$

On a donc

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{b=1}^{n}\frac{\Delta^b 0^n}{b!}\,\frac{d^{b-1}\{f'(t)[\varphi(t)]^n[\psi(t)]^b\}}{dt^{b-1}}. \tag{16}$$

Nous allons considérer quelques conséquences de cette formule.

1.° Soit

$$f(z)=z, \quad \varphi(z)=z, \quad \psi(z)=1.$$

Il vient alors

$$z=t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{b=1}^{n}\frac{\Delta^b 0^n}{b}\binom{n}{b-1}t^{n-b+1}.$$

Cette formule donne le développement en série ordonnée suivant les puissances de x de la fonction z, définie par l'équation

$$z=t+(e^{xz}-1),$$

qui prend la valeur t quand $x=0$.

2.° Soit maintenant

$$f(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z},\quad \varphi(z)=1,\quad \psi(z)=z^2-1.$$

On trouve alors

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{b=1}^{n}\frac{\Delta^b 0^n}{b!}\,\frac{d^{b-1}(t^2-1)^{b-1}}{dt^{b-1}},$$

ou, en employant une formule de Jacobi antérieurement écrite,

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{b=1}^{n}\frac{\Delta^b 0^n}{b}\,2^{b-1}\,X_{b-1}(t).$$

Quand $t=0$, cette formule donne, en posant $b=2m-1$, $\frac{n+1}{2}=m_1$,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[1+\sum_{m=2}^{m_1}(-1)^{m-1}\binom{n}{2m-1}\frac{1.3\ldots(2m-3)}{(m-1)!}\cdot\frac{\Delta^b 0^n}{b}\right].$$

Comme les équations

$$f(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z},\quad z=t+(e^x-1)(z^2-1)$$

donnent

$$f(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}\left\{4(e^x-1)-2t+2\sqrt{4(e^x-1)^2-4t(e^x-1)+1}\right\},$$

et, quand $t=0$,

$$f(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}\left\{4(e^x-1)+2\sqrt{4(e^x-1)^2+1}\right\},$$

les formules antérieures donnent les développements de ces fonctions en série ordonnée suivant les puissances de x.

3.° Soit encore

$$f(z)=\operatorname{arc\,sin} z,\quad \varphi(z)=1,\quad \psi(z)=1-z^2.$$

On trouve alors

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}\sum_{b=1}^{n}\frac{\Delta^b 0^n}{b\,!}\cdot\frac{d^{b-1}(1-t^2)^{b-\frac{1}{2}}}{dt^{b-1}},$$

et, par conséquent, en employant une formule antérieurement écrite,

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}\sum_{b=1}^{n}(-1)^{b-1}\frac{1.3\ldots(2b-1)}{b}\cdot\frac{\Delta^b 0^n}{b\,!}\sin b\,\text{arc}\cos t.$$

Quand $t=0$, on a

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}\sum_{b=1}^{n}\frac{1.3\ldots(2b-1)}{b}\cdot\frac{\Delta^b 0^n}{b\,!}.$$

Ces séries donnent les développements en série ordonnée suivant les puissances de x des fonctions

$$\text{arc}\sin\frac{1-\sqrt{4(e^x-1)^2-4(e^x-1)t+1}}{2(e^x-1)},$$

$$\text{arc}\sin\frac{1-\sqrt{4(e^x-1)^2+1}}{2(e^x-1)}.$$

11. On peut supposer que dans les formules (3) et (5) t est une quantité variable, et elles donnent alors des développements en série d'une fonction déterminée de t. On a déjà trouvé quelques développements à double entrée où entrent les polynômes de Legendre et les polynômes $\sin b\,(\text{arc}\cos t)$; et nous allons maintenant considérer encore deux autres, à simple entrée, où figurent les mêmes polynômes.

Appliquons, pour cela, la formule de Lagrange aux équations

$$u=\frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z},\quad z=t+x\psi(z),\quad \psi(z)=z^2-1.$$

Il vient

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}\frac{d^{n-1}(t^2-1)^{n-1}}{dt^{n-1}},$$

et, par conséquent,

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}2^{n-1}\mathrm{X}_{n-1}(t).$$

Mais, d'un autre côté, les équations considérées donnent

$$\log \frac{1-z}{1+z} - \log \frac{1-t}{1+t} = \log \frac{x-t+\sqrt{4x^2-4xt+1}}{1-t}.$$

Donc

$$\log \frac{x-t+\sqrt{4x^2-4xt+1}}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} 2^{n-1} X_{n-1}(t).$$

En appliquant la formule de Lagrange aux équations

$$u = \text{arc sin}\, z, \quad z = t + x\varphi(z), \quad \varphi(z) = 1 - z^2,$$

on trouve de la même manière

$$\text{arc sin} \frac{2x-1-\sqrt{4x^2-4xt+1}}{2x} = \text{arc sin}\, t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n} \sin n \,\text{arc cos}\, t.$$

III.

Sur le calcul des coefficients des formules (3) et (5).

15. Nous allons maintenant indiquer quelques formules qui se rapportent au calcul des coefficients des séries (3) et (5).

Soit

$$u = f(z), \quad z = t + x\varphi(z).$$

On trouve, au moyen d'une formule connue,

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \Sigma \frac{n!\, f^{(b)}(z)\,(z')^\alpha\,(z'')^\beta \ldots (z^{(n)})^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\,(3!)^\gamma\ldots(n!)^\lambda},$$

où la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n,$$

et où

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Mais la formule de Lagrange donne, étant appliquée directement à la fonction z, définie par la deuxième des équations antérieures,

$$\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}[\varphi(t)]^n}{dt^{n-1}}.$$

Donc on a

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_0 = \Sigma \frac{f^{(b)}(t)}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\,[\varphi_1(t)]^\alpha \left[\frac{1}{2!}\,\frac{d[\varphi(t)]^2}{dt}\right]^\beta \ldots \left[\frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}[\varphi(t)]^n}{dt^{n-1}}\right]^\lambda.$$

Cette formule donne le coefficient de x^n dans le développement de $f(z)$. En la comparant à l'expression du même coefficient, donnée par la formule de Lagrange, on trouve la formule

$$\frac{d^{n-1}[f'(t)\varphi(t)^n]}{dt^{n-1}} = \sum \frac{n!\,f^{(i)}(t)}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}[\varphi(t)]^\alpha \left[\frac{1}{2!}\frac{d\varphi(t)^2}{dt}\right]^\beta \ldots \left[\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}\varphi(t)^n}{dt^{n-1}}\right]^\lambda,$$

qui peut être employée dans le calcul des coefficients de celle-là.

16. Le résultat qu'on vient d'obtenir peut être encore généralisé, comme on va voir. Soient

$$u = f(z_1, z_2, z_3, \ldots),$$

$$z_1 = t_1 + x\varphi_1(z_1), \quad z_2 = t_2 + x\varphi_2(z_2), \quad z_3 = t_3 + x\varphi_3(z_3), \quad \ldots$$

des équations données, dont la première détermine u et les autres $z_1, z_2, z_3, \ldots$

On trouve, en employant une formule que nous avons publiée dans le *Giornale di Matematiche* de Battaglini (t. XVIII),

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n u}{dx^n} = \sum A \frac{d^m f}{dz_1^a dz_2^b \ldots} (z_1)_1^\alpha \left(\frac{(z_1)_2}{2!}\right)^\beta \ldots \left(\frac{(z_1)_n}{n!}\right)^\lambda (z_2)_1^{\alpha'} \left(\frac{(z_2)_2}{2!}\right)^{\beta'} \ldots \left(\frac{(z_2)_n}{n!}\right)^{\lambda'} \ldots,$$

$$A = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,\alpha''!\,\beta''!\ldots\lambda''!\ldots},$$

où la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + \ldots + n\lambda' + \ldots = n,$$

et où

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda, \quad b = \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda', \quad \ldots,$$

et

$$m = a + b + c + \ldots$$

Mais, en comparant les développements de $z_1, z_2, z_3, \ldots$ donnés par la formule de Lagrange, quand on l'applique aux équations précédentes, avec ceux que donne celle de Maclaurin, on trouve

$$(z_1)_1 = \varphi_1(t_1), \quad (z_1)_2 = \frac{d\varphi_1(t_1)^2}{dt_1}, \quad \ldots, \quad (z_1)_n = \frac{d^{n-1}\varphi_1(t_1)^n}{dt_1^{n-1}},$$

$$(z_2)_1 = \varphi_2(t_2), \quad (z_2)_2 = \frac{d\varphi_2(t_2)^2}{dt_2}, \quad \ldots, \quad (z_2)_n = \frac{d^{n-1}\varphi_2(t_2)^n}{dt_2^{n-1}},$$

. . . .

Donc

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_0 = \Sigma A \frac{d^m f(t_1, t_2, t_3, \dots)}{dt_1^{a}\, dt_2^{b}\, dt_3^{c} \dots} [\varphi_1(t_1)]^{\alpha} \left[\frac{1}{2!}\frac{d[\varphi_1(t_1)]^2}{dt_1}\right]^{\beta} \dots \left[\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}[\varphi_1(t_1)]^n}{dt_1^{n-1}}\right]^{\lambda}$$

$$\times [\varphi_2(t_2)]^{\alpha'} \left[\frac{1}{2!}\frac{d[\varphi_2(t_2)]^2}{dt_2}\right]^{\beta'} \dots \left[\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}[\varphi_2(t_2)]^n}{dt_2^{n-1}}\right]^{\lambda'}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous avons ainsi une formule qui donne le coefficient de x^n dans le développement de la fonction u, définie par les équations antérieurement écrites, en série ordonnée suivant les puissances de cette variable.

On peut aussi calculer, au moyen de cette formule, le coefficient de x^n dans le développement de la fonction $f(z_1, z_2, z_3, \dots)$ des racines de l'équation

$$(z - t_1)(z - t_2)\dots(z - t_n) = x\varphi(z),$$

qui se réduisent à $t_1, t_2, t_3, \dots$, quand $x = 0$. Il suffit qu'on l'applique aux équations

$$z - t_1 = x \frac{\varphi(z)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)\dots} = x\varphi_1(z),$$

$$z - t_2 = x \frac{\varphi(z)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)\dots} = x\varphi_2(z),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

17. Dans un intéressant article publié dans les *Nouvelles Annales des Mathématiques* (3.e série, t. III, 1885), M. Cesàro a représenté les coefficients de la série (5) au moyen d'un algorithme qu'il a étudié dans divers travaux et auquel il a donné le nom de *algorithme isobarique.* Nous allons obtenir le résultat auquel il est arrivé au moyen d'une analyse différente de celle qui a été employée par cet illustre géomètre.

Remarquons d'abord que M. Cesàro a donné le nom de *algorithme isobarique* de la fonction $f(z)$ à la somme des produits qui résultent de

$$f(r_1)f(r_2)f(r_3)\dots f(r_s)$$

en y donnant à $r_1, r_2, r_3, \dots, r_s$ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_s = q,$$

η étant un nombre entier donné, et qu'il représente cette somme par la notation

$$\overset{\zeta}{\underset{\eta}{S}} f(r).$$

Cela posé, considérons la série (3):

$$f(z) = f(t) + \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b!} \frac{d^{b-1}\{f'(t)[x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \dots]^b\}}{dt^{b-1}}$$

et développons la puissance du degré b du polynôme qui y entre de la manière suivante.

Multiplions l'un par l'autre deux facteurs égaux à

$$\text{(A)} \qquad x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \dots,$$

le résultat par un troisième, etc., sans faire la réduction des termes semblables. On voit ainsi, par induction, que le coefficient de x^n dans le développement de la puissance du degré b de ce polynôme est égal à la somme des produits qui résultent de

$$\varphi_{h_1}(t)\varphi_{h_2}(t)\dots\varphi_{h_b}(t)$$

en y donnant aux quantités h_1, h_2, ..., h_b les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$h_1 + h_2 + \dots + h_b = n.$$

On peut donc écrire

$$[x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \dots]^b = \sum \overset{b}{\underset{n}{S}} [\varphi_r(t)] x^n.$$

Pour démontrer cette formule, qu'on vient d'obtenir par induction, nous la supposerons vraie pour la valeur b, et nous allons démontrer qu'alors elle subsiste pour la valeur $b+1$.

Multiplions, pour cela, ses deux membres par le facteur (A). On trouve

$$[x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + x^3\varphi_3(t) + \dots]^{b+1} = \sum x^n\{\varphi_1(t)\overset{b}{\underset{n-1}{S}}[\varphi_r(t)] + \varphi_2(t)\overset{b}{\underset{n-2}{S}}[\varphi_r(t)] + \dots\}.$$

Mais de la définition de l'algorithme isobarique il résulte l'identité

$$\varphi_1(t)\overset{b}{\underset{n-1}{S}}[\varphi_r(t)] + \varphi_2(t)\overset{b}{\underset{n-2}{S}}[\varphi_r(t)] + \dots = \overset{b+1}{\underset{n}{S}}[\varphi_r(t)].$$

Donc on a

$$\left[x\varphi_1(t) + x^2\varphi_2(t) + \ldots\right]^{b+1} = \Sigma \overset{b+1}{\underset{n}{\mathrm{S}}} \varphi_i(t)\, x^n.$$

Au moyen de l'identité qu'on vient de démontrer, on peut réduire la série considérée à la forme:

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{b!} \cdot \frac{d^{b-1} \left\{ f'(t) \overset{b}{\underset{n}{\mathrm{S}}} \varphi_i(t) \right\}}{dt^{b-1}}.$$

C'est le résultat qu'on voulait obtenir.

IX

SUR LA THÉORIE DES CUBIQUES CIRCULAIRES ET DES QUARTIQUES BICIRCULAIRES

(Annali di Matematica, série 3.ª, tomo XI. Milano, 1904)

INTRODUCTION.

On sait que les *cubiques circulaires* et les *quartiques bicirculaires* sont anallagmatiques, en général, par rapport à quatre centres d'inversion et on sait déterminer ces points en les considérant comme les centres des quatre cercles qui sont coupés orthogonalement par les cercles bitangents dont la cubique ou la quartique considérée est l'enveloppe. Or, dans la première partie de ce travail, nous allons les chercher par une autre méthode, en les déterminant au moyen d'une hyperbole équilatère, dont une asymptote coïncide avec l'asymptote réelle de la courbe, dans le cas des cubiques circulaires, et au moyen de deux hyperboles équilatères, dans le cas des quartiques bicirculaires.

Une autre question, dont nous allons nous occuper, est celle de la construction des quartiques bicirculaires unicursales. Rappelons d'abord que, si par un point O, placé sur le plan de deux courbes données, on mène des droites qui coupent ces courbes, et si sur chaqu'une on prend un segment, égal à la différence des segments de la même droite compris entre le point donné et les deux courbes, le lieu des points qu'on obtient de cette manière est une courbe appelée *cissoïdale* des courbes données par rapport au point O. Or, nous démontrons, dans la deuxième partie de ce travail, que les quartiques bicirculaires unicursales sont les *cissoïdales* de deux circonférences, réelles ou imaginaires, et qu'il existe, en général, quatre systèmes de circonférences qui donnent la même quartique.

I.

Sur la détermination des centres d'inversion des cubiques circulaires.

1. On sait que les cubiques circulaires peuvent être représentées par l'équation suivante, en prenant un point quelconque de l'asymptote réelle pour l'origine des coordonnées et cette droite pour l'axe des ordonnées:

$$(x^2 + y^2)x = A_1 x^2 + B_1 xy + D_1 x + E_1 y + F_1.$$

En changeant ensuite l'origine des coordonnées pour le point de cette asymptote dont l'ordonnée, rapportée à l'origine primitive, est égale à $\frac{1}{2} B_1$, on peut encore réduire cette équation à la forme

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)x = A x^2 + D x + E y + F.$$

On sait aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe inverse d'une cubique circulaire soit une autre cubique circulaire est que le centre d'inversion coïncide avec un point de la cubique donnée, qui ne soit pas double.

Cela posé, nous allons chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées du centre d'inversion pour que la transformée de la cubique considérée coïncide avec la courbe primitive.

Soient (α, β) les cordonnées du centre d'inversion, et supposons que ce point coïncide avec un point de la cubique donnée, et qu'on ait, par conséquent,

$$(1') \qquad (\alpha^2 + \beta^2)\alpha = A \alpha^2 + D \alpha + E \beta + F.$$

En changeant l'origine des coordonnées pour ce point, en posant pour cela

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

on réduit l'équation de la cubique à la forme

$$(2) \qquad (x_1^2+y_1^2)\,x_1 = (A-3\alpha)\,x_1^2 - \alpha\,y_1^2 - 2\beta\,x_1 y_1 + (2A\alpha + D - 3\alpha^2 - \beta^2)\,x_1 + (E - 2\alpha\beta)\,y_1.$$

En posant maintenant dans cette équation

$$x_1 = \frac{k^2 x_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y_2}{x_2^2+y_2^2},$$

on obtient celle de la cubique inverse:

$$(3) \qquad (x_2^2+y_2^2)(P\,x_2 + Q\,y_2) = (3\alpha - A)\,k^2 x_2^2 + 2\beta\,k^2 x_2 y_2 + \alpha\,k^2 y_2^2 + k^4 x_2,$$

où

$$P = 2A\alpha + D - 3\alpha^2 - \beta^2, \quad Q = E - 2\alpha\beta.$$

En divisant cette équation par P et en égalant ensuite les coefficients des diverses puissances de x_2 et y_2 aux coefficients des mêmes puissances de x_1 et y_1 dans l'équation (2), on trouve les conditions pour que les courbes représentées par les équations (2) et (3) coïncident. On trouve de cette manière sept conditions, mais en sont seulement distinctes les suivantes:

$$P = -k^2, \quad Q = E - 2\alpha\beta = 0.$$

La deuxième équation et l'équation (1′) déterminent les coordonnées (α, β) des points cherchés, et ensuite la première détermine les valeurs correspondantes de k^2.

On conclut donc que *chaque centre d'inversion, par rapport auquel la cubique est anallagmatique, coïncide avec un point d'intersection de cette cubique avec l'hyperbole dont l'équation, rapportée aux mêmes axes que l'équation* (1), *est la suivante:*

$$(4) \qquad 2xy = E;$$

et que le rayon du cercle d'inversion correspondant est donné par la formule

$$k^2 = 3\alpha^2 + \beta^2 - 2A\alpha - D.$$

Inversement, la cubique est anallagmatique par rapport à tous les points d'intersection avec l'hyperbole, à l'exception de ceux dont les coordonnées annulent k^2.

On conclut aussi de ce qui précède que les asymptotes de l'hyperbole considérée coïncident avec l'asymptote réelle de la cubique et avec la perpendiculaire à cette droite, menée par l'origine des coordonnées auxquelles l'équation (1) est rapportée.

En posant

$$f(x,y)=(x^2+y^2)x-\mathrm{A}x^2-\mathrm{D}x-\mathrm{E}y-\mathrm{F}$$

et en remarquant qu'on a

$$\mathrm{Q}=-f(\alpha,\beta),\quad k^2=-\mathrm{P}=f'_x(\alpha,\beta),$$

on voit encore que les tangentes à la même cubique aux centres d'inversion considérés sont parallèles à son asymptote. Cette proposition importante est bien connue (Basset: *An elementary treatrise on cubic and quartic curves.* Cambridge, 1901, p. 157).

On voit, au moyen des mêmes équations, que, si la cubique est *unicursale,* l'hyperbole passe par son point double, mais que ce point ne peut pas être un des centres d'inversion par rapport auquel la courbe soit anallagmatique. Le point double doit, en effet, satisfaire aux équations

$$f'_y(x,y)=2xy-\mathrm{E}=0,\quad f'_x(x,y)=0.$$

On voit enfin, au moyen des équations (1) et (4), que les centres d'inversion considérés sont placés sur une *parabole de* Wallis, représentée par l'équation

$$\mathrm{E}y=2(x^3-\mathrm{A}x^2-\mathrm{D}x-\mathrm{F}).$$

2. En écrivant l'équation (1) sous la forme

$$y=\frac{\mathrm{E}\pm\sqrt{\mathrm{E}^2-4x(x^3-\mathrm{A}x^2-\mathrm{D}x-\mathrm{F})}}{2x},$$

on voit immédiatement que *l'hyperbole précédemment considérée coupe par le milieu toutes les cordes de la cubique, parallèles à son asymptote réelle.*

Il résulte de cette proposition que les tangentes à la cubique aux centres d'inversion, par rapport auxquels elle est anallagmatique, sont parallèles à l'asymptote réelle et que l'hyperbole passe par le point double de la courbe, quand elle est unicursale. Ces deux propriétés de la cubique ont déjà été démontrées précédemment d'une autre manière.

Il résulte encore de la même proposition que, *si la cubique a un point de rebroussement, l'hyperbole considérée lui est tangente en ce point, et que ce cas est le seul dans lequel cette hyperbole est tangente à la cubique* (1), *à distance finie.*

3. L'équation qui détermine les abscisses des centres d'inversion considérés est la suivante:

$$4(x^4-\mathrm{A}x^3-\mathrm{D}x^2-\mathrm{F}x)-\mathrm{E}^2=0,$$

et il résulte de ce qui précède que ses racines sont toutes *distinctes*, quand la courbe n'est pas unicursale, puisque alors la cubique et l'hyperbole ne peuvent pas être tangentes à distance finie.

Si la cubique a un *noeud,* elle est coupée par l'hyperbole à ce point, en deux points distincts du précédent et à l'infini. Alors deux des racines de l'équation précédente sont égales et correspondent au point double de la courbe, et deux sont distinctes; et la courbe est anallagmatique par rapport à *deux* centres d'inversion.

Si la cubique a un *point de rebroussement,* elle est coupée par l'hyperbole à ce point, à un autre point placé à distance finie, et à l'infini. Alors il n'existe qu'*un* centre d'inversion par rapport auquel la courbe soit anallagmatique.

Les propositions précédentes doivent être modifiées quand $E = 0$. Alors l'hyperbole se réduit aux droites $x = 0$ et $y = 0$, et le nombre des points par rapport auxquels la cubique est anallagmatique est égal à 3, quand la courbe n'est pas unicursale, à 1 quand elle a un *noeud,* à zéro quand elle a un point de rebroussement.

Les coordonnées de ces points sont données par les equations

$$x^3 - Ax^2 - Dx - F = 0, \quad y = 0.$$

II.

Sur la détermination des centres d'inversion des quartiques bicirculaires.

4. Considérons maintenant les quartiques bicirculaires et supposons qu'on ait réduit d'abord leur équation, par les moyens connus, à la forme suivante:

$$(5)\qquad (x^2+y^2)^2 = \mathrm{A}\,x^2+\mathrm{B}\,y^2+\mathrm{D}\,x+\mathrm{E}\,y+\mathrm{F};$$

et, en représentant par (α, β) les coordonnées d'un point quelconque, cherchions les conditions pour qu'une quelconque de ces courbes soit anallagmatique par rapport à ce point.

En changeant, pour cela, l'origine des coordonnées pour ce point, donnons à l'équation de la courbe la forme

$$\begin{aligned}(x_1^2+y_1^2)^2+4(\alpha x_1+\beta y_1)(x_1^2+y_1^2) = {} & [\mathrm{A}-4\alpha^2-2(\alpha^2+\beta^2)]x_1^2-8\alpha\beta x_1 y_1+[\mathrm{B}-4\beta^2-2(\alpha^2+\beta^2)]y_1^2\\ & +[2\mathrm{A}\alpha-4\alpha(\alpha^2+\beta^2)+\mathrm{D}]x_1+[2\mathrm{B}\beta-4\beta(\alpha^2+\beta^2)+\mathrm{E}]y_1-f(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

où

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-\mathrm{A}\,x^2-\mathrm{B}\,y^2-\mathrm{D}\,x-\mathrm{E}\,y-\mathrm{F}.$$

Pour obtenir l'équation de la courbe inverse de la précédente, posons maintenant

$$x_1=\frac{k^2 x_2}{x_2^2+y_2^2},\qquad y_1=\frac{k^2 y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

On trouve l'équation

$$\begin{aligned}f(\alpha,\beta)(x_2^2+y_2^2)^2-k^2[(2\mathrm{A}\alpha-4(\alpha^2+\beta^2)\alpha+\mathrm{D})x_2+(2\mathrm{B}\beta-4(\alpha^2+\beta^2)\beta+\mathrm{E})y_2](x_2^2+y_2^2)\\ = k^4(\mathrm{A}-6\alpha^2-2\beta^2)x_2^2+k^4(\mathrm{B}-6\beta^2-2\alpha^2)y_2^2-8k^4\alpha\beta x_2 y_2-4k^6\alpha x_2-5k^6\beta y_2-k^8.\end{aligned}$$

Les conditions pour que la courbe représentée par cette équation coïncide avec l'antérieure sont les suivantes:

$$k^2 [2\,A\,\alpha - 4\,(\alpha^2 + \beta^2)\,\alpha + D] = -\,4\,\alpha f(\alpha, \beta),$$
$$k^2 [2\,B\,\beta - 4\,(\alpha^2 + \beta^2)\,\beta + E] = -\,4\,\beta f(\alpha, \beta),$$
$$k^4 = f(\alpha, \beta),$$
$$4\,\alpha\,(\alpha^2 + \beta^2) - 2\,A\,\alpha - D = \frac{4\,k^6\,\alpha}{f(\alpha, \beta)},$$
$$4\,\beta\,(\alpha^2 + \beta^2) - 2\,B\,\beta - E = \frac{4\,k^6\,\beta}{f(\alpha, \beta)};$$

et, comme les deux dernières équations ne sont pas distinctes des antérieures, elles se réduisent aux suivantes:

$$(6)\qquad \begin{cases} k^4 = f(\alpha, \beta), \\ 2\,A\,\alpha - 4\,(\alpha^2 + \beta^2)\,\alpha + D = -\,4\,k^2\,\alpha, \\ 2\,B\,\beta - 4\,(\alpha^2 + \beta^2)\,\beta + E = -\,4\,k^2\,\beta. \end{cases}$$

Nous avons ainsi trois équations, qui déterminent les coordonnées (α, β) des points par rapport auxquels la quartique considérée est anallagmatique et le rayon k^2 du cercle d'inversion.

En éliminant k^2 entre les deux dernières équations, on trouve la suivante:

$$(7)\qquad 2\,(A - B)\,\alpha\,\beta + D\,\beta - E\,\alpha = 0,$$

laquelle fait voir que les *centres d'inversion considérés sont situés sur une hyperbole dont l'équation, rapportée au même système de coordonnées que* (5), *est*

$$(8)\qquad 2\,(A - B)\,x\,y + D\,y - E\,x = 0.$$

Cette hyperbole passe par l'origine des coordonnées et ses asymptotes sont les parallèles aux axes des coordonnées menées par le point

$$\left(-\,\frac{D}{2\,(A - B)},\quad \frac{E}{2\,(A - B)}\right).$$

En multipliant les deux dernières équations (6), membre à membre, et en ayant égard à la première, on obtient l'équation

$$(9)\qquad \begin{cases} 8\,(A - B)\,(\alpha^2 - \beta^2)\,\alpha\,\beta - 4\,A\,B + 16\,D\,\alpha - 16\,E\,\beta + 16\,F\,\alpha\,\beta \\ \quad - 4\,(D\,\beta + E\,\alpha)\,(\alpha^2 + \beta^2) + 2\,A\,E\,\alpha + 2\,B\,D\,\beta + E\,D = 0, \end{cases}$$

qui donne, en ayant égard à (7),

$$(10)\quad \frac{4\,D\,E}{A-B}(\alpha^2-\beta^2)+4\left[\frac{E^2-D^2}{A-B}+4\,F+A\,B\right]\alpha\beta+2\,A\,E\,\alpha+2\,B\,D\,\beta+E\,D=0.$$

Donc *les centres d'inversion par rapport auxquels la quartique* (5) *est anallagmatique, coïncident avec les points d'intersection de l'hyperbole représentée par l'équation*

$$(11)\quad \frac{4\,D\,E}{A-B}(x^2-y^2)+4\left[\frac{E^2-D^2}{A-B}+4\,F+A\,B\right]x\,y+2\,A\,E\,x+2\,B\,D\,y+E\,D=0$$

avec l'hyperbole représentée par l'équation (8).

Les asymptotes de chacune de ces hyperboles sont perpendiculaires l'une à l'autre.

5. Tous les points d'intersection des hyperboles précédentes sont des centres d'inversion par rapport auxquels la quartique est anallagmatique, à l'exception de ceux qui coïncident avec des points de la quartique considérée, puisque les coordonnées de ces derniers points annulent k^2.

Soit α_1, β_1) un point d'intersection des hyperboles qui satisfasse à cette condition.

On a alors

$$(12)\quad \begin{cases} f(\alpha_1,\beta_1)=0, \\ 2\,A\,\alpha_1-4\,(\alpha_1^2+\beta_1^2)\,\alpha_1+D=0, \\ 2\,B\,\beta_1-4\,(\alpha_1^2+\beta_1^2)\,\beta_1+E=0. \end{cases}$$

Mais

$$-f'_x(\alpha_1,\beta_1)=2\,A\,\alpha_1-4\,(\alpha_1^2+\beta_1^2)\,\alpha_1+D,$$
$$-f'_y(\alpha_1,\beta_1)=2\,B\,\beta_1-4\,(\alpha_1^2+\beta_1^2)\,\beta_1+E.$$

Donc (α_1, β_1) est alors un *point double* de la quartique, et cette courbe est, dans ce cas, *unicursale*.

Inversement, si la quartique est unicursale et (α_1, β_1) sont les coordonnées du point double qu'elle possède à distance finie, α_1 et β_1 satisfont aux équations (12); et, par conséquent, à l'équation qui en résulte:

$$(13)\quad 2\,(A-B)\,\alpha_1\,\beta_1+D\,\beta_1-E\,\alpha_1=0.$$

Donc le point considéré est situé sur l'hyperbole représentée par l'équation (8).

En multipliant les dernières équations (12) membre à membre et en ayant égard à la première et à (13), on voit que α_1 et β_1 satisfont aussi à l'équation (11).

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la quartique considérée est unicursale, les hyperboles (8) *et* (11) *passent par le point double qu'elle a à distance finie. En tous les autres cas les points d'intersection des deux hyperboles sont différents de ceux de la quartique.*

6. L'analyse qui précède doit être modifiée quand $D = 0$ ou $E = 0$, c'est-à-dire quand la quartique est symétrique par rapport à l'un des axes des coordonnées.

En supposant $D = 0$, la deuxième des équations (6) se décompose dans les deux suivantes:

$$\alpha = 0, \quad A - 2(\alpha^2 + \beta^2) = -2k^2.$$

A la première équation correspondent trois valeurs de β, données par l'équation

$$8E\beta^3 + 4(B^2 - 4F)\beta^2 - 4BE\beta + E^2 = 0,$$

et, par conséquent, *trois* centres d'inversion par rapport auxquels la quartique est anallagmatique, si elle n'est pas unicursale. Un de ces points est réel et les autres peuvent être réels ou imaginaires, et ils sont tous placés sur l'axe de la courbe. Si la courbe est unicursale, le nombre des centres d'inversion considérés se réduit à *deux*.

La deuxième équation n'est pas compatible avec les autres équations du système (6) que dans le cas où l'on a

$$(A^2 - 4F)(A - B) + E^2 = 0.$$

Mais, dans ce cas, en éliminant F entre cette équation et celle de la quartique considérée, on la réduit à la forme

$$[2(x^2 + y^2) - A]\,[B - A + 2(A - B)y - E] = 0.$$

La quartique considérée se réduit donc alors à deux circonférences, qui se coupent en deux points de la droite représentée par l'équation

$$2(A - B)y = E,$$

et ce système de circonférences est, par conséquent, anallagmatique par rapport à tous les points de cette droite. Ce résultat s'accorde avec celui que donne immédiatement la Géométrie élémentaire.

On considère de la même manière le cas où $E = 0$.

Si on a $A = B$, l'équation (7) se réduit à la suivante:

$$D\beta - E\alpha = 0,$$

et l'équation (9) à la suivante:

$$4\,[A^2 + 4\,(D\,\alpha + E\,\beta) + 4\,F]\,\alpha\,\beta - 4\,(D\,\beta - E\,\alpha)\,(\alpha^2 - \beta^2) + 2\,A\,(E\,\alpha + D\,\beta) + E\,D = 0.$$

En éliminant β entre ces équations on trouve

$$8\,(D^2 + E^2)\,\alpha^3 + 4\,(A^2 + 4\,F)\,D\,\alpha^2 + 4\,A\,D^2\,\alpha + D^3 = 0.$$

La quartique est donc anallagmatique par rapport à trois centres d'inversion, si elle n'est pas unicursale, et ces points sont situés sur la droite représentée par l'équation

$$D\,y - E\,x = 0.$$

Si la quartique est unicursale, les centres d'inversion considérés et le point double qu'elle a à distance finie sont situés sur cette droite et le nombre de ces centres est égal à deux.

III.

Sur une manière de construire les quartiques bicirculaires unicursales.

7. Nous allons considérer maintenant, en particulier, les *quartiques bicirculaires unicursales* pour donner une méthode très simple pour les construire, qui, suivant nous le croyons, n'a pas encore été remarquée.

Prenons deux circonférences C et C' et sur la première un point O. Menons ensuite par ce point une droite arbitraire OK et soient B le point où elle coupe la circonférence C, et E et E' les points où elle coupe C'. Prenons ensuite sur la même droite, à partir de O, deux segments OA et OA_1, respectivement égaux à OE − OB et OE' − OB. Cela posé, le lieu géométrique des positions que prennent A et A_1, quand OK varie, en tournant autour de O, est une quartique bicirculaire unicursale.

Soient, en effet, O l'origine des coordonnées, (α, β) les coordonnées du centre de C, (a, b) celles du centre de C', R le rayon de cette dernière circonférence, ρ_1 le segment OB, ρ_2 les segments OE et OE', ρ les segments OA et OA_1 et θ l'angle formé par OK avec l'axe des abscisses. L'équation, rapportée aux coordonnées polaires, de la circonférence C est

$$\rho_1 = 2(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta),$$

et celle de la circonférence C'

$$\rho_2^2 - 2(a\cos\theta + b\sin\theta)\rho_2 = R^2 - a^2 - b^2.$$

Nous avons donc

$$\rho = a\cos\theta + b\sin\theta \pm \sqrt{(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + R_1^2 - 2(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)},$$

où

$$R_1^2 = R^2 - a^2 - b^2;$$

et par conséquent

$$[\rho + (2\alpha - a)\cos\theta + (2\beta - b)\sin\theta]^2 = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + R_1^2,$$

ou, en posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$[(x^2 + y^2) + (2\alpha - a)x + (2\beta - b)y]^2 = (ax + by)^2 + R_1^2(x^2 + y^2),$$

ou enfin

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2 + y^2)^2 + 2[(2\alpha - a)x + (2\beta - b)y](x^2 + y^2) \\ &= (4a\alpha - 4\alpha^2 + R_1^2)x^2 + (4b\beta - 4\beta^2 + R_1^2)y^2 + 4(a\beta + b\alpha - 2\alpha\beta)xy. \end{aligned}\right.$$

Cette équation représente une *quartique bicirculaire unicursale*. Son point double coïncide avec le point O, et il résulte de ce qui précède que ce point est un *noeud réel*, quand les circonférences C et C′ se coupent, un *point de rebroussement* quand elles sont tangentes, et un *point isolé* quand elles n'ont pas de points communs. Il résulte aussi de la construction précédente que les tangentes à la quartique au point double passent, dans les deux premiers cas, par les points communs aux deux circonférences.

8. Le système de deux circonférences qu'on vient d'employer pour construire la quartique représentée par l'équation précédente, n'est pas unique. En remplaçant, en effet, dans l'équation antérieure d'abord a par $-a$, b par $-b$, et ensuite α par $\alpha - a$ et β par $\beta - b$, cette équation ne change pas; et, par conséquent, il existe un deuxième système de deux circonférences, l'une ayant pour centre $(-a, -b)$ et passant par l'origine des coordonnées O, et l'autre ayant pour centre $(\alpha - a, \beta - b)$ et pour rayon R_1 qui, quand on lui applique la construction précédemment considérée, mènent à la même quartique.

Nous représenterons le premier système de circonférences qu'on a considéré par C_1 et C_1', le deuxième par C_2 et C_2', et nous ferons voir bientôt que la même quartique peut être encore considérée comme la *cissoïdale* de deux autres systèmes de circonférences imaginaires (C_3, C_3') et (C_4, C_4').

9. Nous allons étudier maintenant la question inverse de la précédente, c'est-à-dire, nous allons voir si toute quartique bicirculaire unicursale donnée peut être construite par la méthode qu'on vient d'indiquer.

Pour résoudre cette question, je remarque d'abord que l'équation de toute quartique bicirculaire unicursale peut être réduite à la forme suivante, en prenant le point double qu'elle possède à distance finie pour l'origine des coordonnées:

$$(15)\qquad (x^2 + y^2)^2 + 2(mx + ny)(x^2 + y^2) = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

et que les conditions pour que la courbe représentée par cette équation coïncide avec la quartique représentée par (14) sont

$$2\alpha - a = m, \quad 2\beta - b = n,$$

$$4a\alpha - 4\alpha^2 + R_1^2 = A,$$

$$4b\beta - 4\beta^2 + R_1^2 = C,$$

$$4(a\beta + b\alpha - 2\alpha\beta) = B.$$

Or ces équations donnent, en éliminant α et β dans les trois dernières au moyen des deux premières,

$$\text{(K)} \qquad a^2 - m^2 + R_1^2 = A, \quad b^2 - n^2 + R_1^2 = C, \quad 2(ab - mn) = B,$$

et par conséquent

$$\text{(16)} \qquad a^4 - (A - C + m^2 - n^2)\,a^2 - \left(\frac{1}{2}B + mn\right)^2 = 0,$$

$$\text{(17)} \qquad b = \frac{B + 2mn}{2a},$$

$$\text{(18)} \qquad \alpha = \frac{1}{2}(a + m), \quad \beta = \frac{1}{2}(b + n),$$

$$\text{(19)} \qquad R_1^2 = \frac{1}{2}[m^2 + n^2 + A + C - (a^2 + b^2)],$$

$$\text{(20)} \qquad R^2 = \frac{1}{2}[m^2 + n^2 + A + C + a^2 + b^2].$$

Nous avons ainsi six équations qui déterminent les quantités a, b, α, β, R_1 et R, quand m, n, A, B, C sont données, et lesquelles font voir que la quartique (15) peut être considérée, de quatre manières différentes, comme la *cissoïdale* de deux circonférences, réelles ou imaginaires, par rapport à un point situé sur une de ces circonférences.

10. Il nous faut maintenant examiner si les circonférences précédentes sont réelles ou imaginaires.

L'équation (16) donne pour a^2 une valeur positive et une valeur négative; et par conséquent pour a deux valeurs réelles, égales et de signe contraire, et deux valeurs imaginaires; l'équation (17) détermine ensuite les valeurs correspondantes de b. Nous avons ainsi les coordonnées des centres des quatre circonférences C'_1, C'_2, C'_3 et C'_4, qui sont deux rélles et deux imaginaires.

Les équations (18) déterminent ensuite les coordonnées des centres des circonférences correspondantes C_1, C_2, C_3 et C_4, qui sont aussi deux réelles et deux imaginaires.

L'équation (20) détermine enfin les rayons des circonférences C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 et fait voir que ces rayons sont réels quand

$$m^2 - n^2 - A + C + a^2 + b^2 > 0,$$

et imaginaires dans le cas contraire.

On conclut de ce qui précède que, quand cette dernière condition est satisfaite, existent deux systèmes de circonférences réelles (C_1, C'_1), (C_2, C'_2), au moyen desquelles on peut construire la quartique (15), en employant la méthode considérée au n.° 7. Les centres de ces circonférences sont situés sur une droite qui passe par l'origine des coordonnées, à égale distance de ce point. Les deux autres systèmes de circonférences (C_3, C'_3), (C_4, C'_4) sont toujours imaginaires.

11. Les coordonnées des centres des circonférences imaginaires dont la quartique (15) est la *cissoïdale* peuvent être déterminées de la manière suivante.

Soit a_1 une des racines réelles de l'équation (16) et b_1, α_1, β_1, R' les valeurs correspondantes de b, α, β, R.

En posant dans cette équation

$$m = 2\,\alpha_1 - a_1, \quad n = 2\,\beta_1 - b_1,$$

$$A = 4\,a_1\,\alpha_1 - 4\,\alpha_1^2 + R'^2 - (a_1^2 + b_1^2),$$

$$C = 4\,b_1\,\beta_1 - 4\,\beta_1^2 + R'^2 - (a_1^2 + b_1^2),$$

$$B = 4\,(a_1\,\beta_1 + b_1\,\alpha_1 - 2\,\alpha_1\,\beta_1),$$

on obtient la suivante:

$$a^4 - (a_1^2 - b_1^2)\,a^2 - a_1^2\,b_1^2 = 0,$$

qui donne pour a les quatre valeurs

$$a = \pm\,a_1, \quad a = \pm\,b_1\,i.$$

Les quatre valeurs correspondantes de b sont

$$b = \frac{a_1\,b_1}{a} = \pm\,b_1, \quad b = \mp\,a_1\,i,$$

et celles de α et β

$$\alpha = \frac{1}{2}(2\alpha_1 - a_1) - \frac{1}{2} b_1 i, \quad \beta = \frac{1}{2}(2\beta_1 - b_1) + \frac{1}{2} a_1 i,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(2\alpha_1 - a_1) + \frac{1}{2} b_1 i, \quad \beta = \frac{1}{2}(2\beta_1 - b_1) - \frac{1}{2} a_1 i,$$

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1,$$

$$\alpha = \alpha_1 - a, \quad \beta = \beta_1 - b.$$

Les valeurs correspondantes de R^2 sont données par l'égalité

$$R^2 = R'^2 - (a_1^2 + b_1^2),$$

quand $\alpha = \pm b_1 i$, et par le formule

$$R^2 = R'^2,$$

quand $\alpha = \pm a_1$.

Les coordonnées des centres des circonférences imaginaires C_3 et C_4 sont donc

$$\left[\frac{1}{2}(2\alpha_1 - a_1) - \frac{1}{2} b_1 i, \quad \frac{1}{2}(2\beta_1 - b_1) + \frac{1}{2} a_1 i\right],$$

$$\left[\frac{1}{2}(2\alpha_1 - a_1) + \frac{1}{2} b_1 i, \quad \frac{1}{2}(2\beta_1 - b_1) - \frac{1}{2} a_1 i\right],$$

ceux des circonférences C'_3 et C'_4 sont

$$(b_1 i, \, -a_1 i), \quad (-b_1 i, \, a_1 i),$$

et les rayons de ces deux dernières circonférences sont égaux à

$$R'^2 - (a_1^2 + b_1^2).$$

12. Entre les positions des centres des circonférences C'_1, C'_2, C'_3 et C'_4 et des *foyers* de la quartique considérée, qui résultent de l'intersection de ses asymptotes, il existe une relation que nous allons indiquer.

Cherchions les asymptotes de la courbe au moyen de la méthode connue. On trouve

$$y = \pm i x + u,$$

où u représente une quantité donnée par l'équation

$$u^2 - (m i - n) u + \frac{1}{4} (A + B i - C) = 0.$$

Or, cette équation donne, en y remplaçant m, n, A, B, C par leurs valeurs en fonction de a_1, b_1, α_1, β_1 et en la résolvant ensuite:

$$u = \frac{1}{2} [(2 \alpha_1 - a_1) i - (2 \beta_1 - b_1)] \pm \frac{1}{2} (b_1 - a_1 i).$$

Les équations de asymptotes cherchées sont donc les suivantes:

$$y = i x + \frac{1}{2} [(2 \alpha_1 - a_1) i - (2 \beta_1 - b_1) + b_1 - a_1 i],$$

$$y = - i x + \frac{1}{2} [- (2 \alpha_1 - a_1) i - (2 \beta_1 - b_1) + b_1 + a_1 i],$$

$$y = i x + \frac{1}{2} [(2 \alpha_1 - a_1) i - (2 \beta_1 - b_1) - b_1 + a_1 i],$$

$$y = - i x + \frac{1}{2} [- (2 \alpha_1 - a_1) i - (2 \beta_1 - b_1) - b_1 - a_1 i].$$

Or ces droites se coupent en quatre points, deux réels et deux imaginaires, qui sont les *foyers singuliers* de la quartique, et dont les coordonnées sont les suivantes:

$$(- \alpha_1, - \beta_1), \quad (a_1 - \alpha_1, b_1 - \beta_1),$$

$$\left[\frac{1}{2} (a_1 - 2 \alpha_1) + \frac{1}{2} b_1 i, \quad \frac{1}{2} (b_1 - 2 \beta_1) - \frac{1}{2} a_1 i\right],$$

$$\left[\frac{1}{2} (a_1 - 2 \alpha_1) - \frac{1}{2} b_1 i, \quad \frac{1}{2} (b_1 - 2 \beta_1) + \frac{1}{2} a_1 i\right].$$

On en conclut que *ces foyers sont situés sur les droites qui passent par le point double de la quartique considérée et par les centres des circonférences* C_1, C_2, C_3, C_4, *et que les distances de ces foyers au point double sont respectivement égales aux distances des centres au même point.*

13. En cherchant le vecteur du milieu de la corde A A_1 (n.° 7) de la quartique considérée, qui passe par le point double O, on trouve, en le représentant par ρ_3,

$$\rho_3 = \frac{1}{2} (O A + O A_1),$$

et par conséquent (n.° 7)

$$\rho_3 = a\cos\theta + b\sin\theta - 2(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta).$$

Cette équation représente donc, en coordonnées polaires, le lieu géométrique du milieu des cordes de la quartique, qui passent par son point double.

L'équation cartesienne du même lieu est la suivante:

$$x^2 + y^2 - (a - 2\alpha)x - (b - 2\beta)y = 0.$$

Donc: *le lieu géométrique du milieu des cordes qui passent par le point double d'une quartique bicirculaire unicursale est une circonférence, qui passe par le point double.*

Les coordonnées du centre de cette circonférence sont

$$x_1 = \frac{1}{2}a - \alpha, \quad y_1 = \frac{1}{2}b - \beta,$$

et son rayon est égal à $\frac{1}{2}\sqrt{(a - 2\alpha)^2 + (b - 2\beta)^2}$.

14. Il résulte immédiatement de la définition de la circonférence, précédemment considérée, comme lieu du milieu des cordes de la quartique qui passent par le point double O, que les points où elle coupe la quartique coïncident avec les points de contact des tangentes à la même quartique, menées par le point O.

Nous ajouterons à ce qui précède que les tangentes considérées peuvent être tracées d'une manière très facile, puisqu'il résulte immédiatement de la méthode donnée au n.° 7 pour construire la quartique qu'elles coïncident avec les tangentes à la circonférence C', menées par le point double O. Elles sont donc imaginaires quand le point O est situé à l'intérieur de la circonférence considérée et réelles dans le cas contraire.

On peut encore obtenir ces résultats analytiquement, en les déduisant de l'équation de la quartique, mise sous la forme

$$(x^2 + y^2 + (2\alpha - a)x + (2\beta - b)y)^2 = (R^2 - b^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2 + 2abxy.$$

Cette équation indique, en effet, que la circonférence dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + (2\alpha - a)x + (2\beta - b)y = 0$$

coupe la quartique aux mêmes points que les droites représentées par l'équation

$$(R^2 - b^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2 + 2abxy = 0.$$

Or ces droites sont tangentes à la circonférence C′, dont l'équation a été écrite au n.º 7, passent par l'origine des coordonnées O et sont réelles, quand $a^2+b^2>R^2$, et imaginaires dans le cas contraire.

15. Considérons, pour faire une première application de la doctrine précédente, la courbe définie par l'équation

$$(x^2+y^2)^2=f^2x^2+g^2y^2,$$

laquelle fut étudiée par Booth en son *Treatrise on somme new geometrical methods* (London, 1877, t. II, p. 163), où il lui a donné le nom de *lemniscate elliptique* [1].

On a alors (n.º 9)

$$A=f^2,\quad B=0,\quad C=g^2,\quad m=0,\quad n=0,$$

et par conséquent a est déterminé par l'équation

$$a^4-(f^2-g^2)a^2=0, \tag{21}$$

qui donne

$$a=0,\quad a=\pm\sqrt{f^2-g^2}.$$

A la première solution correspondent les valeurs suivantes de b, R^2, α et β, données par les formules (17) et (18):

$$b=\pm\sqrt{g^2-f^2},\quad R^2=g^2,\quad \alpha=0,\quad \beta=\pm\frac{1}{2}\sqrt{g^2-f^2}.$$

Donc: *si l'on a* $g^2>f^2$, *il existe deux systèmes de circonférences réelles* (C_1, C_1') *et* (C_2, C_2') *telles que la courbe considérée est une cissoïdale de chaque système par rapport à l'origine des coordonnées.*

Les coordonnées des centres de ces circonférences sont

$$\left(\alpha=0,\ \beta=\pm\frac{1}{2}\sqrt{g^2-f^2}\right),\quad \left(a=0,\ b=\pm\sqrt{g^2-f^2}\right),$$

et les circonférences C_1 et C_2 passent par l'origine des coordonnées et les rayons des autres sont égaux à g.

---

[1] Voyez aussi notre: *Geometria de las Curvas notables, tanto planas como alabiadas,* publié par l'Académie des Siences de Madrid (p. 118).

Les centres des circonférences C'_1 et C'_2 sont donc situés sur l'axe des ordonnées et *coïncident avec les foyers de l'ellipse*

$$\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}=1,$$

dont la lemniscate elliptique est la podaire.

Les centres des circonférences C_1 et C_2 sont aussi situés sur l'axe des ordonnées et les distances de ces points à l'origine sont égales à la moitié des distances des centres de C'_1 et C'_2 au même point.

Aux autres solutions $a=\pm\sqrt{f^2-g^2}$ de l'équation (21) correspondent les valeurs de b, R^2, α, β suivantes:

$$b=0, \quad R^2=f^2, \quad \alpha=\frac{1}{2}\sqrt{f^2-g^2}, \quad \beta=0,$$

qui sont réelles quand $f^2>g^2$.

Dans ce cas les centres des circonférences réelles des deux systèmes dont la quartique considérée est une *cissoïdale,* sont situés sur l'axe des abscisses; ceux de C'_1 et C'_2 coïncident encore avec les foyers de l'ellipse dont la quartique considérée est la *podaire* centrale, et ceux de C_1 et C_2 divisent en deux parties égales les segments de cet axe compris entre les précédents et l'origine des coordonnées.

16. La courbe représentée par l'équation

$$(x^2+y^2)^2=f^2x^2-g^2y^2,$$

à laquelle Booth a donné (l. c.) le nom de *lemniscate hyperbolique,* peut être étudiée de la même manière.

On trouve ainsi pour a, b, R^2, α et β les valeurs

$$a=0, \quad b=\pm i\sqrt{f^2+g^2}, \quad R^2=-g^2,$$

auxquelles correspondent deux systèmes de circonférences imaginaires, et les valeurs

$$a=\pm\sqrt{f^2+g^2}, \quad b=0, \quad R^2=f^2, \quad \alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{f^2+g^2}, \quad \beta=0,$$

auxquelles correspondent deux systèmes de circonférences réelles, de chaqu'un desquels la quartique est une *cissoïdale.* Les centres des deux circonférences (C'_1, C'_2) coïncident, comme dans le cas antérieur, avec les foyers de l'hyperbole dont la lemniscate hyperbolique est la *podaire,* les autres deux divisent les distances de ceux qui précédent au centre de la courbe en deux parties égales.

Quand $f^2 = g^2$ la courbe considérée coïncide avec la *lemniscate de Bernoulli,* et on voit donc que cette courbe est la *cissoïdale* des circonférences dont les centres sont $(f\sqrt{2}, 0)$ et $\left(\frac{1}{2}f\sqrt{2}, 0\right)$, ou $(-f\sqrt{2}, 0)$ et $(-\frac{1}{2}f\sqrt{2}, 0)$, par rapport à l'origine des coordonnées, le rayon de la première circonférence étant égale à f et celui de l'autre à $\frac{1}{2}f\sqrt{2}$.

17. Nous allons faire la dernière application, en considérant le *limaçon de Pascal,* dont l'équation est

$$(x^2 + y^2 - kx)^2 = h^2(x^2 + y)^2,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 2k(x^2 + y^2)x = (h^2 - k^2)x^2 + h^2y^2.$$

On trouve alors, au moyen des formules (K) et (18) du n.° 9, en y posant

$$\mathrm{A} = h^2 - k^2, \quad \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{C} = h^2, \quad m = -k, \quad n = 0,$$

les résultats suivants:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \mathrm{R}^2 = h^2, \quad \alpha = -\frac{1}{2}k, \quad \beta = 0.$$

Donc: *le limaçon de Pascal est la cissoïdale de deux circonférences par rapport à l'origine des coordonnées. Le centre d'une circonférence coïncide avec cette origine et son rayon est égal à h; les coordonnées du centre de l'autre circonférence sont* $\left(\alpha = -\frac{1}{2}k, \beta = 0\right)$ *et son rayon est égal à* $\frac{1}{2}k$.

Quand $h = k$, on a la *cardioïde.* Alors les deux circonférences qu'on vient de considérer sont tangentes.

L'équation de la circonférence qui est le lieu du milieu des cordes du limaçon qui passent par son point double, est

$$x^2 + y^2 - kx = 0.$$

Cette circonférence est donc symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées de celle, de centre $\left(-\frac{1}{2}k, 0\right)$ qui fut considérée précédemment.

X

SUR UN PROBLÈME DE GAUSS ET UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE FONCTIONS SYMÉTRIQUES

(Giornale di Matematiche, t. XLII. Napoli, 1904)

INTRODUCTION.

Nous allons étudier dans ce travail quelques questions qui se rattachent plus ou moins étroitement au problème suivant, par lequel Gauss a ouvert son beau et important Mémoire : *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (¹):

Chercher la somme

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)\dots}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)\dots}$$
$$+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)\dots}+\frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)\dots}+\dots,$$

$a, b, c, d, \dots$ étant m quantités différentes, et n un nombre entier quelconque, positif ou négatif, ou zéro.

Comme solution de ce problème ce grand géomètre a trouvé que cette somme coïncide avec la fonction symétrique entière de $a, b, c, \dots$

$$\Sigma_1\, a^p\, b^q\, c^r \dots,$$

où le signe Σ_1 s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$p+q+r+\dots=n-m+1, \qquad (n \overline{\gtrless} m)$$

et il a démontré aussi, en passant, que la somme considérée représente le coefficient de x^{n-m+1} dans le développement de la fonction

$$[(1-ax)(1-bx)(1-cx)\dots]^{-1}$$

en série ordonnée suivant les puissances de x.

(¹) Werke, t. III, pag. 265.

La fonction précédente est un cas particulier de la suivante:

$$(1) \qquad \Sigma_1 \binom{\mu+p-1}{p}\binom{\nu+q-1}{q}\ldots a^p b^q c^r \ldots,$$

étudiée jadis par Wronski, qui en a fait usage pour résoudre les équations numériques, et plus récemment par M. d'Ocagne en deux articles publiés aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3.e série, t. II, 1883, pag. 230, t. V, 1886, pag. 257); et en un important *Mémoire sur les suites récurrentes,* publié au *Journal de l'École Polytechnique de Paris* (XLIVe. Cahier, 1894); par M. Cesàro en deux intéressants articles publiés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e sèrie, t. III, 1884, pag. 561, t. IV, 1885, pag. 59); par M. Dickstein das les *Mémoires de l'Académie de Cracovie* (1888, t. XVI); etc.

Pour calculer cette fonction, quand $a, b, c, \ldots$ satisfont à l'équation

$$(2) \qquad (1-ax)^\mu (1-bx)^\nu \ldots = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_m$ étant des quantités données, M. d'Ocagne a fait connaître, dans le Mémoire précédemment mentionné, une formule, qui a sur celles qu'on avait employées pour le même but, l'avantage de donner le résultat sous sa forme définitive, sans qu'on ait besoin de faire ensuite des réductions de termes semblables, et encore un théorème, pour simplifier ce calcul, quand le second membre de (2) peut être décomposé en un produit de facteurs.

Dans le présent travail je vais m'occuper principalement de ce calcul et de quelques applications du résultat obtenu par Gauss.

Je commence pour donner une démonstration de ce résultat, un peu différente de celle de Gauss, et pour établir la formule employée par M. d'Ocagne pour le calcul de la fonction (1), par une voie différente de celle qui a été suivie par cet illustre géomètre. Ensuite je présente une nouvelle méthode pour le calcul de la même fonction, en déduisant sa valeur de celle de la somme $a^n + b^n + c^n + \ldots$ par une règle analogue et d'aussi facile application que celle qui donne la dérivée des fonctions entières. Cette règle me parait avoir quelque importance, parce qu'il existe des tables pour le calcul de la somme considérée, qu'on peut ainsi employer pour le calcul de la fonction (1).

Les méthodes pour le calcul de (1) qu'on vient d'indiquer, sont applicables quelle que soit la valeur des entiers $\mu, \nu, \ldots$ Mais, pour le cas où $\mu, \nu, \ldots$ sont différents de l'unité, nous présentons une nouvelle méthode, d'une application plus facile. Pour cela, nous considérons d'abord le cas où $\mu, \nu, \ldots$ ont la même valeur h, et, pour obtenir la valeur de (1) dans ce cas, nous donnons premièrement une formule générale et ensuite une règle au moyen de laquelle on forme successivement les valeurs des fonctions correspondantes aux valeurs $1, 2, 3, 4, \ldots$ de h, semblable à celle qu'on emploie pour former les dérivées successives des fonctions entières. Le cas où tous ou quelqu'uns des nombres $\mu, \nu, \ldots$ sont différents est ensuite réduit au précédent au moyen du théorème de M. d'Ocagne ci-dessus mentionné, et encore par une autre méthode d'une application plus facile.

Dans la deuxième partie de ce travail je fais l'application des résultats obtenus dans la première à la théorie du développement des fonctions rationnelles en série. Je retrouve les résultats obtenus, par un autre voie, par M. d'Ocagne dans le *Mémoire sur les suites récurrentes,* et je donne encore un nouvelle manière de résoudre la question quand le dénominateur de la fonction considérée a des racines égales.

La dernière partie de ce travail est consacrée à quelques applications de l'identité de Gauss qui nous a servi de point de départ, obtenues en donnant des valeurs particulières à $a, b, c, \ldots$, ce qui nous conduit á diverses identités qui nous paraissent offrir quelque intérêt.

I.

Solution du problème de Gauss précédemment énoncé et calcul des fonctions symétriques auxquelles il conduit.

1. Considérons la fraction rationnelle

$$\frac{x^{m-1}}{\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\cdots}.$$

En la décomposant en des fractions simples, on trouve

$$\frac{x^{m-1}}{\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\cdots}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{m-1}}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)\cdots}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{a}}$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{m-1}}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)\cdots}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{b}}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^{m-1}}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{c}}+\cdots$$

et, par conséquent,

$$\frac{x^{m-1}}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\cdots}=\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\cdots}\cdot\frac{1}{1-ax}+$$

$$+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\cdots}\cdot\frac{1}{1-bx}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)\cdots}\cdot\frac{1}{1-cx}+\cdots$$

ou

$$\frac{x^{m-1}}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\cdots}=\frac{\alpha_1}{1-ax}+\frac{\beta_1}{1-bx}+\frac{\gamma_1}{1-cx}+\cdots,\tag{3}$$

où

$$\alpha_1=\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\cdots},\quad \beta_1=\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\cdots},\ \ldots,$$

ou encore, en développant les binômes qui entrent dans le second membre,

$$\frac{x^{m-1}}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots} = \alpha_1[1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots]$$
$$+\beta_1[1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\ldots]$$
$$+\gamma_1[1+cx+c^2x^3+c^3x^3+\ldots]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= S_0 + S_1x + S_2x^2 + \ldots + S_kx^k + \ldots,$$

où

$$S_k = \alpha_1 a^k + \beta_1 b^k + \gamma_1 c^k + \ldots$$

On a donc

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots} = \frac{S_0}{x^{m-1}} + \frac{S_1}{x^{m-2}} + \ldots + \frac{S_{m-2}}{x} + S_{m-1} + S_m x + S_{m+1}x^2 + \ldots$$

Nous avons ainsi l'égalité au moyen de laquelle Gauss obtient S_0, S_1, S_2, ... Pour cela, il multiplie les développements des binômes

$$(1-ax)^{-1},\ (1-bx)^{-1},\ (1-cx)^{-1},\ \ldots,$$

qui entrent dans le premier membre de cette égalité, ce qui donne un résultat de la forme

$$\Sigma a^p b^q c^r \ldots x^{p+q+r+\cdots},$$

et ensuite il égale les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Il trouve de cette manière

$$S_0 = 0,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ \ldots,\ S_{m-2} = 0,\ S_{m-1} = 1,$$

et, pour $n \gtreqless 1$,

$$S_{m+n-1} = \Sigma_1 a^p b^q c^r \ldots, \tag{4}$$

où le signe Σ_1 s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$p + q + r + \ldots = n.$$

2. Supposons maintenant que $a, b, c, \ldots$ soient les racines d'une équation algébrique donnée

$$x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

et que, par conséquent, on ait

$$(5)\qquad (1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots = 1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_mx^m.$$

On peut alors exprimer S_{m+n-1} en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_m$ au moyen des théorèmes généraux de la théorie des fonctions symétriques; mais il est préferable d'employer, pour ce but, une formule, analogue à celle donnée par Waring pour le calcul de la somme des puissances de même degré des racines de l'équation considérée, que nous allons démontrer.

Pour cela, remarquons premièrement que S_{m+n-1} étant, comme on a vu, le coefficient de x^{m+n-1} dans le développement de

$$\frac{x^{m-1}}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots}$$

en série ordonnée suivant les puissances de x, cette somme est aussi le coefficient de x^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots}$$

suivant les puissances de la même variable.

On a donc

$$(6)\qquad S_{m+n-1} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0},$$

où

$$y = (1-ax)^{-1}(1-bx)^{-1}(1-cx)^{-1}\ldots$$

En appliquant maintenant la formule suivante, bien connue, qui donne la dérivée d'ordre n de la fonction $\varphi(u)$, par rapport à x, quand u est une fonction de x donnée:

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{d^n\varphi}{dx^n} = \Sigma\,\frac{n!\,\frac{d^i\varphi}{du^i}\,u'^{\alpha}\,u''^{\beta}\ldots u^{(n)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}\,(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}}$$

à la fonction

$$\varphi(u) = y = u^{-1},\quad u = (1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots,$$

on trouve, en ayant égard à l'identité (5),

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0} = \Sigma\,(-1)^i\,\frac{n!\,i!\,p_1^{\alpha}\,p_2^{\beta}\,p_3^{\gamma}\cdots p_m^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!},$$

où le signe Σ s'étend à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + m\lambda = n,$$

et où i est donné par

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Nous avons donc la formule

$$(7) \qquad S_{n-m+1} = \Sigma (-1)^i \frac{i!\, p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \cdots p_m^\lambda}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \lambda!},$$

que nous nous proposions de trouver.

En posant

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m,$$

on peut encore écrire cette identité de la manière suivante:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{a^{m+n-1}}{f'(a)} + \frac{b^{m+n-1}}{f'(b)} + \frac{c^{m+n-1}}{f'(c)} + \ldots = \Sigma_1 a^r b^s c^t \ldots \\ & \qquad = \Sigma (-1)^i \frac{i!\, p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \cdots p_m^\lambda}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \lambda!}. \end{aligned} \right.$$

3. Nous allons maintenant calculer la somme S_k, quand k est un nombre négatif quelconque, et, pour cela, nous partirons encore, comme dans le cas précédent, de la formule (3), qui donne

$$\begin{aligned} \frac{x^{m-1}}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots} &= -\alpha_1 \left[\frac{1}{ax} + \frac{1}{a^2x^2} + \frac{1}{a^3x^3} + \ldots \right] \\ &\quad - \beta_1 \left[\frac{1}{bx} + \frac{1}{b^2x^2} + \frac{1}{b^3x^3} + \ldots \right] \\ &\quad - \gamma_1 \left[\frac{1}{cx} + \frac{1}{c^2x^2} + \frac{1}{c^3x^3} + \ldots \right] \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= -\left[S_{-1} \frac{1}{x} + S_{-2} \frac{1}{x^2} + \ldots + S_{-n} \frac{1}{x^n} + \ldots \right], \end{aligned}$$

où

$$S_{-n} = \alpha_1 a^{-n} + \beta_1 b^{-n} + \gamma_1 c^{-n} + \ldots,$$

et, par conséquent, en y posant $x=\frac{1}{z}$,

(9) $$\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)\ldots}=-[S_{-1}+S_{-2}z+\ldots+S_{-n}z^{n-1}+\ldots].$$

Nous avons donc

$$S_{-n}=-\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}[(z-a)(z-b)(z-c)\ldots]^{-1}}{dz^{n-1}}\right]_{z=0}.$$

Mais, en appliquant la formule (A) aux fonctions

$$\varphi(u)=u^{-1},\quad u=(z-a)(z-b)(z-c)\ldots,$$

et en remarquant que

$$(z-a)(z-b)(z-c)\ldots=z^m+p_1z^{m-1}+p_2z^{m-2}+\ldots+p_m,$$

on trouve

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}[(z-a)(z-b)(z-c)\ldots]^{-1}}{dz^{n-1}}\right]_{z=0}=\Sigma(-1)^i\cdot\frac{i!\,p_{m-1}^{\alpha}\,p_{m-2}^{\beta}\cdots p_1^{\omega}\,p_0^{\lambda}}{p_m^{i+1}\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

où $p_0=1$.

Donc on a la formule cherchée

(10) $$S_{-n}=\Sigma(-1)^{i+1}\frac{i!\,p_{m-1}^{\alpha}\,p_{m-2}^{\beta}\cdots p_1^{\omega}\,p_0^{\lambda}}{p_m^{i+1}\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

où la somme Σ s'étend à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+m\lambda=n-1,$$

et où i est donné par

$$i=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

L'équation qu'on vient de trouver peut être encore écrite de la manière suivante:

$$\frac{a^{-n}}{f'(a)}+\frac{b^{-n}}{f'(b)}+\frac{c^{-n}}{f'(c)}+\ldots=\Sigma(-1)^{i+1}\frac{i!\,p_{m-1}^{\alpha}\,p_{m-2}^{\beta}\cdots p_0^{\lambda}}{p_m^{i+1}\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}.$$

À ce qui précède nous ajouterons encore que de la formule (9) résulte la suivante:

$$\begin{aligned} S_{-1} + S_{-2} z + \ldots + S_{-n} z^{n-1} + \ldots \\ = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{b}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{c}\right)^{-1}\ldots}{abc\ldots} \\ = \frac{(-1)^{m+1}}{abc\ldots}\left[1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}+\frac{z^3}{a^3}+\ldots\right] \\ \cdot \left[1+\frac{z}{b}+\frac{z^2}{b^2}+\frac{z^3}{b^3}+\ldots\right] \\ \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

qui donne

$$S_{-n} = \frac{(-1)^{m+1}}{abc\ldots} \Sigma_1 a^{-p} b^{-q} c^{-r} \ldots, \tag{11}$$

où le signe Σ_1 s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$p+q+r+\ldots=n-1.$$

Cette formule peut encore être écrite de manière suivante:

$$S_{-n} = (-1)^{m+1} \Sigma_1 a^{-p'} b^{-q'} c^{-r'} \ldots, \tag{12}$$

où p', q', r', ... représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$p'+q'+r'+\ldots=n+m-1.$$

4. Considérons, en particulier, le cas où la fonction (5) est *pair*. Alors on a

$$p_1=0, \quad p_3=0, \quad p_5=0, \ \ldots,$$

et la formule (7) se réduit à la suivante:

$$S_{m+n-1} = \Sigma (-1)^{i} \cdot \frac{i!\, p_2^{\beta} p_4^{\delta} \ldots p_m^{\lambda}}{\beta!\,\delta!\ldots\lambda!}, \tag{13}$$

où β, δ, ..., λ représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\beta+2\delta+\ldots+\frac{m}{2}\lambda=\frac{n}{2},$$

et où

$$i=\beta+\delta+\dots+\lambda.$$

Il résulte de cette formule

$$S_{m+n-1}=0,$$

quand n est un nombre *impair*.

On a aussi, puisque m est, par hypothèse, un nombre pair,

$$S_{-n}=\Sigma(-1)^{i+1}\cdot\frac{p_{m-2}^{\beta}\,p_{m-4}^{\delta}\cdots p_0^{\lambda}}{p_m^{i+1}\;\beta!\,\delta!\dots\lambda!},\tag{14}$$

où β, δ, ..., λ sont les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\beta+2\delta+\dots+\frac{m}{2}\lambda=\frac{n-1}{2},$$

et où

$$i=\beta+\delta+\dots\lambda,\quad p_0=1.$$

5. La fonction symétrique qui figure dans le problème de Gauss qui a été le point de départ de ce travail, coïncide, comme on a vu précédemment, avec la fonction

$$\Sigma_1\,a^p\,b^q\,c^r\dots,$$

où Σ_1 s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$p+q+r+\dots=n.$$

Cette fonction est un cas particulier, correspondant à $\mu=1$, $\nu=1$, ..., de la suivante, appelée par Wronski *fonction aleph:*

$$S'_n=\Sigma_1\binom{\mu+p-1}{p}\binom{\nu+q-1}{q}\dots a^p\,b^q\,c^r\dots,\tag{15}$$

qu'on est ainsi amené à étudier, et dont nous allons nous occuper maintenant.

6. On trouve facilement, en premier lieu, que la fonction S'_n coïncide avec le coefficient de x dans la développement de la fonction

$$(1-ax)^{-\mu}(1-bx)^{-\nu}(1-cx)^{-\tau}\dots$$

en série ordonnée suivant les puissances de x, et qu'elle peut être calculée au moyen de la formule antérieurement employée pour le calcul de la fonction S_{m+n-1}, en supposant qu'on ait

$$(16) \qquad (1-ax)^{\mu}(1-bx)^{\nu}\dots = 1+p_1x+p_2x^2+\dots+p_mx^m.$$

En effet, cette dernière identité donne la suivante:

$$\begin{aligned}[1+p_1x+p_2x^2+\dots+p_mx^m]^{-1} &= (1-ax)^{-\mu}(1-bx)^{-\nu}\dots \\ &= \left|1+\mu ax+\binom{\mu+1}{2}a^2x^2+\dots\right| \\ &\cdot \left|1+\nu bx+\binom{\nu+1}{2}b^2x^2+\dots\right| \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

dont on tire, en égalant les coefficients de x^n dans le premier et dans le second membres et en posant, comme antérieurement,

$$y=[1+p_1x+p_2x_2+\dots+p_mx^m]^{-1},$$

le résultat cherché:

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} S'_n &= \Sigma_1\binom{\mu+p-1}{p}\binom{\nu+q-1}{q}\dots a^p b^q c^r\dots = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0} \\ &= \Sigma(-1)^i\cdot\frac{i!\,p_1^{\alpha}p_2^{\beta}\dots p_m^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!},\end{aligned}\right.$$

qui coïncide avec celui qui a été obtenu par M. d'Ocagne, au moyen d'une analyse différente, aux n.os 4 et 7 de son *Mémoire sur les suites récurrentes*.

7. La fórmule (17) détermine la fonction S'_n, quand sont donnés les quantités p_1, p_2, ..., p_m. En la comparant à celle de Waring:

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} s_n &= a^n+b^n+c^n+\dots \\ &= n\Sigma(-1)^i\cdot\frac{(i-1)!\,p_1^{\alpha}p_2^{\beta}\dots p_m^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!},\end{aligned}\right.$$

où α, β, ..., λ sont les solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\dots+m\lambda=n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

on arrive à une conclusion importante pour le calcul des fonctions considérées.

Il résulte, en effet, de ces deux formules que, si

$$n\mathrm{A}\, p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_m^\lambda$$

est un terme de l'expression de s_n, il existe dans l'expression de S'_n le terme correspondant

$$(\alpha + \beta + \ldots + \lambda)\,\mathrm{A} p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_m^\lambda,$$

et que le nombre des termes qui entrent dans les deux expressions est le même.

On peut donc déduire l'expression de S'_n de celle de s_n en multipliant chaque terme de celle-ci par son degré et en divisant le résultat par n.

Ainsi des formules connues:

$$\begin{aligned}
&s_1 = -p_1,\\
&s_2 = p_1^2 - 2p_2,\\
&s_3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3,\\
&s_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 - 4p_1p_3 + 2p_2^2 - 4p_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on tire immédiatement les suivantes:

$$(19)\qquad \begin{cases}
\mathrm{S}'_1 = -p_1,\\
\mathrm{S}'_2 = p_1 - p_2,\\
\mathrm{S}'_3 = -p_1^3 + 2p_1p_2 - p_3,\\
\mathrm{S}'_4 = p_1^4 - 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 - p_4,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}$$

8. En se basant sur le remarque qu'on vient d'employer pour écrire immédiatement ces dernières formules, on peut aussi déduire immédiatement de la formule connue

$$s_n = \sum_{t=1}^{t=n} (-1)^t \frac{n}{t} \Sigma' p_{\gamma_{t1}} p_{\gamma_{t2}} \ldots p_{\gamma_{tt}},$$

où Σ' représente une somme qui s'étend aux solutions entières positives de l'équation

$$q_1 + q_2 + \dots + q_t = n,$$

la formule suivante:

$$S'_n = \sum_{t=1}^{t=n} (-1)^t \Sigma' p_{q_1} p_{q_2} \cdots p_{q_t}, \tag{20}$$

démontrée par M. Cesàro d'une manière différente en un article publié aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3.^{e} série, t. IV, pag. 67).

Cette dernière formule montre que les fonctions considérées sont comprises dans la classe des fonctions appelées par M. Cesàro *isobariques*, lesquelles cet illustre géomètre a étudiées en divers travaux publiés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* et dans le *Journal de Battaglini*.

9. Nous allons étudier maintenant la question inverse de celle qu'on vient de considérer, à savoir: déterminer $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$, quand sont données les quantités S'_1, S'_2, S'_3, ..., S'_m.

On résout immédiatement cette question en partant de d'égalité

$$y^{-1} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_m x^m = [1 + S'_1 x + S'_2 x^2 + \dots]^{-1},$$

qui donne

$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k y^{-1}}{dx^k}\right)_{x=0},$$

et, par conséquent, en appliquant la formula (A),

$$p_k = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{i!\, S'^{\alpha}_1 S'^{\beta}_2 \dots S'^{\lambda}_m}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!}, \tag{21}$$

où le signe Σ s'étend à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \dots + k\lambda = k,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

En comparant cette formule à la formule (17), on conclut ce résultat, bien connu; on passe des expressions qui donnent S'_1, S'_2, ..., S'_m en fonction de $p_1, p_2, \dots, p_m$ pour celles qui donnent $p_1, p_2, \dots, p_m$ en fonction de S'_1, S'_2, ..., S'_m en échangeant entre elles ces quantités.

10. On peut aussi tirer immédiatement les expressions qui donnent $p_1, p_2, \ldots, p_m$ en fonction de $S'_1, S'_2, \ldots, S'_m$ de celles qui donnent $p_1, p_2, \ldots, p_m$ en fonction de $s_1, s_2, \ldots, s_m$. En effet, en comparant la formule suivante, trouvée par Waring:

$$(22) \qquad p_k = \Sigma(-1)^i \cdot \frac{s_1^\alpha s_2^\beta \ldots s_m^\lambda}{1^\alpha 2^\beta \ldots m^\lambda . \alpha! \beta! \ldots \lambda!},$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = k,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

à la formule (21), on voit qu'on passe de chaque terme de la première au terme correspondant de la deuxième en remplaçant $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m$ par

$$S'_1,\ 2S'_2,\ 3S'_3,\ \ldots,\ mS'_m,$$

et en multipliant ensuite son coefficient par $i!$, i étant le degré du terme de (22) considéré.

Ainsi, par exemple, on passe de l'expression connue

$$p_4 = \frac{1}{4!} s_1^4 - \frac{1}{4} s_1^2 s_2 + \frac{1}{3} s_1 s_3 + \frac{1}{8} s_2^2 - \frac{1}{4} s_4$$

à l'expression de p_4 en fonction de S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, en multipliant les termes de la première respectivement par $4!, 3!, 2!, 2!, 1$ et en remplaçant s_1, s_2, s_3, s_4 par $S'_1, 2S'_2, 3S'_3, 4S'_4$, ce qui donne

$$p_4 = S_1'^4 - 3S_1'^2 S'_2 + 2S'_1 S'_3 + S_2'^2 - S'_4.$$

11. La méthode qu'on vient d'employer pour calculer la fonction S'_n peut être remplacée par une autre de plus facile application, quand tous ou quelques uns des nombres $\mu, \nu, \ldots$, dont dépend cette fonction, sont supérieurs à l'unité, comme on va voir. Considérons premièrement le cas où tous ces nombres son égaux à un même nombre h, et posons

$$S_n^{(h)} = \Sigma_1 \binom{h+p-1}{p} \binom{h+q-1}{q} \ldots a^p b^q c^r \ldots$$

On a alors

$$y = [1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m]^{-1}$$
$$= (1 - ax)^{-h}(1 - bx)^{-h} \ldots = [1 + p'_1 x + p'_2 x^2 + \ldots + p'_\omega x^\omega]^{-h},$$

où $m = h\omega$, et

$$S_n^{(h)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=0}.$$

En appliquant maintenant la formule (A) aux fonctions

$$\varphi(u) = y = u^{-h}, \quad u = 1 + p'_1 x + \ldots + p'_\omega x^\omega,$$

on trouve, pour le calcul de $S_n^{(h)}$, la formule suivante:

$$(23) \qquad S_n^{(h)} = \frac{1}{(h-1)!} \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(i+h-1)!\, p_1'^{\alpha} p_2'^{\beta} \ldots p_\omega'^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!},$$

où le signe Σ s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + \omega\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Cette formule détermine $S_n^{(h)}$ en fonction de $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\omega$ et elle est de plus facile application que la formule analogue (17), qui donne $S_n^{(h)}$ en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_m$, puisque ω est plus petit que m.

12. Les fonctions $S_n^{(h)}$, qu'on vient de considérer, peuvent être calculées d'une manière analogue à celle qu'on a employée au n.° 7 pour calculer S_n, comme nous allons faire voir.

En comparant, en effet, les formules

$$S_n^{(1)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{i!\, p_1'^{\alpha} p_2'^{\beta} \ldots p_\omega'^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!},$$

$$S_n^{(2)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(i+1)!\, p_1'^{\alpha} p_2'^{\beta} \ldots p_\omega'^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!},$$

qui résultent de (23) en y posant $h = 1$ et $h = 2$, on voit qu'on peut déduire l'expression de

$S_n^{(2)}$ en fonction de $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\omega$ de celle de $S_n^{(1)}$ en multipliant chaque terme de la dernière par son degré, augmenté d'une unité.

Mais, d'un autre côté, on voit que, quand $h=1$, les quantités $m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ coïncident avec $\omega, p'_1, p'_2, \ldots, p'_\omega$, et S'_n coïncide avec $S_n^{(1)}$.

Donc, on peut déduire des formules (19) les suivantes, en remplaçant dans les premières $p_1, p_2, \ldots$ par $p'_1, p'_2, \ldots$ et en multipliant ensuite chacun de leurs termes par son degré, augmenté d'une unité:

$$S_1^{(2)} = -2p'_1,$$

$$S_2^{(2)} = 2p'^2_1 - 2p'_2,$$

$$S_3^{(2)} = -4p'^3_1 + 6p'_1 p'_2 - 2p'_3,$$

$$S_4^{(2)} = 5p'^4_1 - 12p'^2_1 p'_2 + 6p'_1 p'_3 + 3p'^2_2 - 2p'_4,$$

....

On voit aussi, au moyen de la formule (23), qu'on peut déduire l'expression de $S_n^{(h)}$ de celle $S_n^{(h-1)}$ en multipliant chaque terme de la deuxième par

$$\frac{\alpha+\beta+\ldots+\lambda+h-1}{h-1}.$$

En nous basant sur la même remarque nous pouvons déduire immédiatement de la formule (20) la suivante:

$$S_n^{(2)} = \sum_{t=1}^{t=n} (-1)^t (t+1) \Sigma p'_{\eta_1} p'_{\eta_2} \cdots p'_{\eta_t},$$

où $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ sont les solutions entières positives de l'équation

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_t = n.$$

En continuant de la même manière on obtient la formule

$$(24) \qquad S_n^{(h)} = \sum_{t=1}^{t=n} (-1)^t \cdot \frac{(t+1)(t+2)\ldots(t+h-1)}{(h-1)!} \Sigma p'_{\eta_1} p'_{\eta_2} \cdots p'_{\eta_t},$$

laquelle fait voir que toutes les fonctions $S_n^{(h)}$ sont *isobariques*.

13. La question qui a pour but de déterminer $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\omega$, quand les quantités $S_1^{(h)}$, $S_2^{(h)}$, $S_3^{(h)}$, $\ldots$, $S_\omega^{(h)}$ sont données, peut être résolue facilement, en procédant comme au n.º 9.

En partant, en effet, de l'identité

$$1 + p'_1 x + p'_2 x^2 + \ldots + p'_\omega x^\omega = [1 + S_1^{(h)} x + S_2^{(h)} x^2 + \ldots]^h$$

et en remarquant qu'on a

$$p'_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right)_{x=0}, \quad y = [1 + S_1^{(h)} x + S_2^{(h)} x^2 + \ldots]^{-h},$$

on trouve

$$p'_k = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(h+i-1)!\,[S_1^{(h)}]^\alpha [S_2^{(h)}]^\beta \ldots [S_\omega^{(h)}]^\lambda}{(h-1)!\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}, \tag{25}$$

où α, β, γ, ..., λ représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = k,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

14. On a vu, au n.° 11, que les fonctions

$$S'_n = \Sigma_1 \binom{\mu + p - 1}{p} \binom{\nu + q - 1}{q} \ldots a^p b^q c^r \ldots,$$

où

$$p + q + r + \ldots = n,$$

peuvent être calculées au moyen de la formule (23), quand tous les nombres μ, ν, ... sont égaux à un même nombre h. On a vu aussi, au n.° 12, que les mêmes fonctions peuvent être calculées en déduisant celles qui correspondent à $h = 1$ des expressions des sommes s_1, s_2, s_3, ..., donées au n.° 7 (en y remplaçant d'abord p_1, p_2, p_3, ... par p'_1, p'_2, p'_3, ...), celles qui correspondent à $h = 2$ de celles qui correspondent à $h = 1$, etc., au moyen d'une règle analogue à celle qu'on emploie pour former les dérivées successives des fonctions entières. Nous allons maintenant considérer le cas où tous ou quelques uns des nombres μ, ν, ... son différents et démontrer que, dans ce cas, les sommes S'_n peuvent être représentées par des fonctions des précédentes.

Mais, avant cela, il nous faut completer une notation employée antérieurement. Nous représenterons par $S_n^{(h)}[M]$ la fonction

$$\Sigma_1 \binom{h + p - 1}{p} \binom{h + q - 1}{q} \ldots a_1^p b_1^q c_1^r \ldots.$$

où

$$p + q + r + \ldots = n,$$

qui correspond au polynôme

$$\mathrm{M} = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots = (1 - a_1 x)(1 - b_1 x)(1 - c_1 x) \ldots,$$

et qui représente, par conséquent, le coefficient de x^n dans le développement de M^{-k}.

Cela posé, si l'on représente par y la fonction

$$y = [1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m]^{-1},$$

on a (n.º 6)

$$\mathrm{S}'_n = \frac{1}{n\,!} \left[\frac{d^n y}{dx^n}\right]_{x=0}.$$

Pour trouver la dérivée qui entre dans cette égalité, décomposons, au moyen de la théorie des racines égales, y^{-1} de la manière suivante:

$$y^{-1} = \mathrm{M}^h \mathrm{N}^k \mathrm{P}^l \ldots,$$

M, N, P, ... étant des fonctions entières de x, telles que les équations

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{P} = 0, \ \ldots$$

n'aient que des racines simples, et ensuite décomposons y de la manière suivante:

$$y = \frac{1}{\mathrm{M}^h \mathrm{N}^k \mathrm{P}^l \ldots} = \frac{\varphi_1(x)}{\mathrm{M}^h} + \frac{\varphi_2(x)}{\mathrm{N}^k} + \frac{\varphi_3(x)}{\mathrm{P}^l} + \ldots,$$

où $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... représentent des fonctions entières de x, qu'on sait déterminer (Hermite: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, pag. 266).

Développons maintenant M^{-h}, N^{-k}, P^{-l} ..., ce qui donne

$$\mathrm{M}^{-h} = 1 + \mathrm{S}_1^{(h)}[\mathrm{M}]\, x + \mathrm{S}_2^{(h)}[\mathrm{M}]\, x^2 + \mathrm{S}_3^{(h)}[\mathrm{M}]\, x^3 + \ldots$$

$$\mathrm{N}^{-k} = 1 + \mathrm{S}_1^{(k)}[\mathrm{N}]\, x + \mathrm{S}_2^{(k)}[\mathrm{N}]\, x^2 + \mathrm{S}_3^{(k)}[\mathrm{N}]\, x^3 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

multiplions ensuite ces séries respectivement par $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., ordonnons les produits suivant les puissances de x et additionnons enfin les résultats. Le coefficient de x^n dans la série qu'on obtient de cette manière représente S'_n.

L'expression qu'on obtient a la forme suivante:

$$\begin{aligned} S'_n = M_0 + M_1 S_1^{(h)}[M] + \ldots + M_n S_n^{(h)}[M] \\ + N_1 S_1^{(k)}[N] + \ldots + N_n S_n^{(k)}[N] \\ + P_1 S_1^{(l)}[P] + \ldots + P_n S_n^{(l)}[P] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Elle est *linéaire* par rapport aux fonctions

$$S_1^{(h)}[M], \quad S_2^{(h)}[M], \ \ldots, \quad S_1^{(k)}[N], \quad S_2^{(k)}[N], \ \ldots,$$

et résout la question proposée, puisqu'on sait calculer ces quantités au moyen de la formule (23) ou au moyen de la méthode donnée au n.º 12.

15. La question qu'on vient de considérer peut être encore résolue par une méthode différente, que nous allons indiquer.

Soit encore

$$y^{-1} = M^h N^k P^l \ldots$$

et formons la dérivé d'ordre n du produit $M^{-h} N^{-k} P^{-l} \ldots$ au moyen de la formule de dérivation de Leibnitz. On trouve

$$S'_n = \Sigma \frac{[M^{-h}]^{(p)} [N^{-k}]^{(q)} [P^{-l}]^{(r)} \ldots}{p!\, q!\, r! \ldots},$$

$$p + q + r + \ldots = n.$$

Mais on a

$$S_p^{(h)}[M] = \frac{1}{p!} \left[\frac{d^p M^{-h}}{dx^p}\right]_{x=0},$$

$$S_q^{(k)}[N] = \frac{1}{q!} \left[\frac{d^q N^{-k}}{dx^q}\right]_{x=0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc

$$S'_n = \Sigma S_p^{(h)}[M] S_q^{(k)}[N] S_r^{(l)}[P] \ldots, \tag{26}$$

où $p, q, r, \ldots$ représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$p + q + r + \ldots = n.$$

Cette formule résout la question considérée, mais le résultat auquel on arrive n'est pas linéaire, comme l'expression obtenue par la méthode antérieure, par rapport à $S_p^{(h)}[M]$, $S_q^{(k)}[N]$, ... Elle coïncide avec une formule donnée par M. d'Ocagne dans l'un des intéressants articles qu'il a publié sur les fonctions *alephs* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3.e série, t. v, pag. 258) et ensuite dans son *Mémoire sur les suites récurrentes* (n.° 10).

16. Aux deux méthodes qu'on vient de donner, pour le calcul de la fonction symétrique S'_n, nous allons joindre encore une autre, de nature différente, en faisant connaître une formule au moyen de laquelle on calcule directement ces fonction.

Je considère, pour cela, la formule suivante, que j'ai démontrée dans mon *Curso de Analyse* (*Calculo differencial*, 3.e éd. pag. 232):

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times \alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'! \times \ldots} \cdot \dfrac{\partial^r \psi}{\partial u_1^i\, \partial u_2^j \ldots} \\ \left(u_1'\right)^{\alpha} \left(\dfrac{u_1''}{2!}\right)^{\beta} \ldots \left(\dfrac{u_1^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda} \times \left(u_2'\right)^{\alpha'} \left(\dfrac{u_2''}{2!}\right)^{\beta'} \ldots \left(\dfrac{u_2^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'} \times \ldots, \end{array} \right.$$

qui donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand $y = \psi(u_1, u_2, \ldots)$ et $u_1, u_2, \ldots$ sont des fonctions de x; et je l'applique aux fonctions

$$\begin{aligned} y &= M^{-h} N^{-k} P^{-l} \ldots \\ u_1 &= M = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_u x^u, \\ u_2 &= N = 1 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots + r_v x^v, \\ &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En posant ensuite $x = 0$, je trouve la formule suivante:

$$(27) \quad S'_n = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(-1)^{i+j+\ldots}\, h(h-1)\ldots(h-i+1) \times k(k-1)\ldots(k-j+1) \times \ldots}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times \alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'! \times \ldots} \\ \times q_1^{\alpha} q_2^{\beta} \ldots q_u^{\lambda} \times r_1^{\alpha'} r_2^{\beta'} \ldots r_v^{\lambda'} \times \ldots, \end{array} \right.$$

où le signe Σ s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + u\lambda + \alpha' + 2\beta' \ldots + v\lambda' + \ldots = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda, \quad j = \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda', \ \ldots,$$

qui résout la question considérée.

17. Les quantités que nous avons représentées par $S_n^{(h)}$ au n.° 11 peuvent être exprimées par des fonctions entières des quantités $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $S_3^{(1)}$, ..., comme on va voir.

En effet, l'égalité

$$y = \{[(1-ax)(1-bx)(1-cx)\dots]^{-1}\}^h$$
$$= \{1 + S_1^{(1)} x + S_2^{(1)} x^2 + S_3^{(1)} x^3 + \dots\}^h$$

donne, en lui appliquant la formule (A),

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=0} = \Sigma \frac{n!\, h(h-1)\dots(h-i+1)\, [S_1^{(1)}]^\alpha [S_2^{(1)}]^\beta \dots}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \dots},$$

où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

et où α, β, γ, ... représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n$$

qui donnent pour i valeurs inférieures à h.

On a donc

$$S_n^{(h)} = \Sigma \frac{h(h-1)\dots(h-i+1)\, [S_1^{(1)}]^\alpha [S_2^{(1)}]^\beta \dots}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \dots}. \tag{28}$$

Malgré cela, il convient de considérer toutes les fonctions $S_n^{(h)}$, quelque soit h, comme élements primordiaux pour le calcul des fonctions symétriques considérées, puisqu'on peut calculer toutes ces fonctions avec égale facilité au moyen de la formule (23), ou les déduire de la fonction s_n par la méthode donnée aux n.° 7 et 12.

18. Nous avons vu au n.° 3 que le problème de Gauss mène aussi à considérer la fonction symétrique

$$\Sigma_1\, a^{-p}\, b^{-q}\, c^{-r} \dots,$$

où

$$p + q + r + \dots = n,$$

laquelle peut être calculée au moyen des formules (10) et (11), quand est

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx)\dots = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_m x^m.$$

Cette fonction est un cas particulier de la suivante:

$$\mathrm{S}'_{-n} = \Sigma_1 \binom{\mu + p - 1}{p} \binom{\nu + q - 1}{q} \ldots a^{-p} b^{-q} c^{-r} \ldots,$$

qui ne diffère pas de celle qu'on a étudiée aux n.^{os} antérieurs par sa nature, mais seulement par le remplacement de $a, b, c, \ldots$ par $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \ldots$

Pour la calculer, quand

$$(1 - ax)^{\mu} (1 - bx)^{\nu} \ldots = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m,$$

il suffit de remarquer qu'on a alors

$$\mathrm{S}'_{-n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)_{x=0},$$

où

$$y = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\mu} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\nu} \ldots$$

$$= \left[1 + \frac{p_{m-1}}{p_m} x + \frac{p_{m-2}}{p_m} x^2 + \ldots + \frac{p_0}{p_m} x^m \right]^{-1}.$$

Donc on trouve, en procédant comme au n.° 6,

$$\mathrm{S}'_{-n} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{i!\, p_{m-1}^{\alpha} p_{m-2}^{\beta} \cdots p_0^{\lambda}}{p_m^i \alpha! \beta! \ldots \lambda!}, \tag{29}$$

où Σ s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + m\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda, \quad p_0 = 1.$$

En posant

$$\mathrm{S}^{(h)}_{-n} = \Sigma_1 \binom{h + p - 1}{p} \binom{h + q - 1}{q} \ldots a^{-p} b^{-q} c^{-r} \ldots,$$

on trouve de la même manière

$$\mathrm{S}^{(h)}_{-n} = \frac{1}{(h-1)!} \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(i + h - 1)!\, p_{m-1}^{\alpha} p_{m-2}^{\beta} \cdots p_0^{\lambda}}{p_m^i \alpha! \beta! \ldots \lambda!}, \tag{29'}$$

où

$$\alpha + 2\beta + \ldots + \omega\lambda = n,$$

quand

$$(1 - ax)(1 - bx)(1 - cx)\ldots = 1 - p'_1 x + \ldots \pm p'_\omega x^\omega$$

et $m = h\omega$.

Il est facile de voir qu'on peut déduire l'expression de S'_{-n}, en fonction de $p_m, p_{m-1}, \ldots$, de celle correspondante de s_{-n} et l'expression de $S^{(h)}_{-n}$, en fonction de $p'_1, p'_2, \ldots$, de celle de $S^{(1)}_{-n}$ au moyen des règles employées aux n.os 7 et 12 pour le cas des fonctions S et S'.

Il est aussi facile de voir que, quand les entiers μ, ν, ... ne sont pas tous égaux, on peut calculer S'_n au moyen des formules qui résultent de celles données aux n.os 14 et 15, en remplaçant les indices $n, p, q, r, \ldots$ de S par $-n, -p, -q, -r, \ldots$, ou au moyen de la formule:

$$S'_{-n} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(-1)^{i+j+\cdots}\, h(h-1)\ldots(h-i+1) \times k(k-1)\ldots(k-j+1) \times \ldots}{q_0^h r_0^k \ldots \alpha!\beta!\ldots\lambda! \times \alpha'!\beta'!\ldots\lambda'! \times \ldots} \\ \times q_{\mu-1}^{\alpha} q_{\mu-2}^{\beta} \cdots q_0^{\lambda} \times r_{\nu-1}^{\alpha'} r_{\nu-2}^{\beta'} \cdots r_0^{\lambda'} \times \ldots; \end{array} \right.$$

où $q_0 = 1$, $r_0 = 1$, ...

$$\alpha + 2\beta + \ldots + \mu\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + \nu\lambda' + \ldots = n,$$

et

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda, \quad j = \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda', \ldots$$

II.

Application au développement des fonctions rationnelles en série.

19. La doctrine qu'on vient d'exposer a une immédiate application dans la théorie des séries récurrentes.

Soit

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}}{1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m}$$

une fonction rationnelle donnée. Son développement en série ordonnée suivant les puissances de x est donné par la formule connue:

$$y = K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \ldots + K_n x^n + \ldots,$$

où

$$K_n = A_0 S'_n + A_1 S'_{n-1} + \ldots + A_{m-1} S'_{n-m+1}, \tag{30}$$

comme on le voit facilement en multipliant le numérateur de la fractiou considérée par le développement (n.º 6)

$$[1 + p_1 x + \ldots + p_m x^m]^{-1} = 1 + S'_1 x + S'_2 x^2 + \ldots$$

Les valeurs des quantités S'_1, S'_2, S'_3, ..., qui entrent dans ces formules, peuvent être calculées au moyen de la formule (17), employée par M. M. d'Ocagne dans son *Mémoire sur les suites récurrentes,* dont on a fait déjà mention, ou par la règle que, pour le même but, nous avons proposée au n.º 7.

20. Considérons maintenant la question inverse de la précédente.

En égalant, pour cela, les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de l'identité

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1} = (1 + p_1 x + \ldots + p_m x^m)$$
$$\times (K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \ldots + K_n x^n + \ldots),$$

on trouve les équations

$$(31) \qquad \begin{cases} K_0 = A_0, \\ K_1 + p_1 K_0 = A_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ K_{m-1} + p_1 K_{m-2} + p_2 K_{m-3} + \ldots + p_{m-1} K_0 = A_{m-1}; \end{cases}$$

et la suivante:

$$(32) \qquad K_{m+n} + p_1 K_{m+n-1} + p_2 K_{m+n-2} + \ldots + p_m K_n = 0.$$

Si on donne donc les valeurs de K_0, K_1, K_2, ..., K_{m-1} et la relation (32) ou, ce qui est la même chose, l'échelle:

$$(p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

de la série, on peut écrire immédiatement sa function génératrice, puisque les coefficients de son numérateur, A_0, A_1, ..., A_{m-1}, sont donnés par les formules (31) et son dénominateur est le polynôme:

$$1 + p_1 x + \ldots + p_m x^m;$$

ensuite la formule (30) détermine le coefficient du terme général de la série.

On peut encore énoncer ces résultats d'une autre manière.

En posant, en effet, $x = 1$, on voit que, quand il sont donnés les m premiers termes d'une *suite* récurrente:

$$K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}, K_m, K_{m+1}, \ldots$$

et l'échelle $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, on détermine l'*intégrale* K_n de la suite au moyen de la formule (30); la somme de la série:

$$K_0 + K_1 + \ldots + K_n + \ldots$$

est alors égale à

$$\frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_{m-1}}{1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_m}.$$

Nous ajouterons encore que cette dernière série est convergente quand, pour $x=1$, la fonction y est développable en série convergente; ce qui a lieu seulement quand

$$|a|<1, \quad |b|<1, \quad |c|<1, \ldots$$

a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, ... étant les racines de l'équation:

$$1+p_1x+\ldots+p_mx^m=0,$$

On trouve ces résultats dans le Mémoire de M. d'Ocagne précédemment mentionné, où ils sont obtenus par une voie différente.

21. Tout ce qu'on vient de dire aux n.^{os} précédents a lieu quand les racines de l'équation:

$$1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_mx^m=0,$$

appelée par Lagrange *génératrice,* sont inégales et quand elles sont toutes ou quelques unes égales. Mais, dans ce dernier cas, on peut résoudre les questions considérées por une autre méthode que nous allons indiquer.

Considérons premièrement la fonction rationnelle:

$$y=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{m-1}x^{m-1}}{(1+p'_1x+p'_2x^2+\ldots+p'_\omega x^\omega)^h},$$

où $m=h\omega$.

Puisqu'on a

$$(1+p'_1x+p'_2x^2+\ldots+p'_\omega x^\omega)^{-h}=1+S_1^{(h)}x+S_2^{(h)}x^2+\ldots,$$

on peut alors développer y au moyen de la formule:

$$y=K_0^{(h)}+K_1^{(h)}x+\ldots+K_n^{(h)}x^n+\ldots$$

où

$$K_n^{(h)}=A_0S_n^{(h)}+A_1S_{n-1}^{(h)}+\ldots+A_{m-1}S_{n-m+1}^{(h)},$$

$S_1^{(h)}$, $S_2^{(h)}$, etc. représentant les fonctions symétriques définies au n.° 11, qu'on peut calculer au moyen de la formule (23) du n.° 11, ou par la règle donnée au n.° 12, qui les déterminent en fonction de $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots, p'_\omega$.

On peut calculer aussi, au moyen de cette formule, l'*intégrale de la suite récurrente* dont l'échelle est

$$(p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

en supposant

$$1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_mx^m=(1+p'_1x+\ldots+p'_\omega x^\omega)^l,$$

quand on veut que cette intégrale soit représentée par une fonction de p'_1, p'_2, p'_3, ..., p'_ω.

22. Considérons maintenant le cas général où

$$y=\frac{A_0+A_1x+\ldots+A_{m-1}x^{m-1}}{1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_mx^m},$$

et

$$1+p_1x+\ldots+p_mx^m=M^hN^kP^l\ldots,$$

M, N, P, ... étant des polynômes entiers tels que $M=0$, $N=0$, $P=0$, ... n'aient que des racines simples, lesquels on peut déterminer au moyen de la méthode des racines égales.

On a alors

$$(1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_mx^m)^{-1}=M^{-h}N^{-k}P^{-l}\ldots$$
$$=1+S'_1x+S'_2x^2+S'_3x^3+\ldots,$$

S'_1, S'_2, S'_3, ... étant des quantités qu'on peut déterminer par les méthodes données aux n.^os 14, 15 et 16.

On a ensuite

$$y=K'_0+K'_1x+K'_2x^2+K'_3x^3+\ldots,$$

où

$$K'_n=A_0S'_n+A_1S'_{n-1}+\ldots+A_{m-1}S'_{n-m+1}.$$

23. On peut encore résoudre la question d'une manière plus directe en décomposant y de la manière suivante :

$$y=\frac{\varphi_1(x)}{M^h}+\frac{\varphi_2(x)}{N^k}+\frac{\varphi_3(x)}{P^l}+\ldots,$$

où $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... représentent des fonctions entières, qu'on sait déterminer, et en développant ensuite chaque terme de cette somme au moyen de la méthode donnée au numere précédent.

24. Nous allons maintenant faire application de la doctrine précédente à la même fraction:

$$y=\frac{x^3}{1-3x+2x^2-x^3-x^4}$$

à laquelle M. M. d'Ocagne a appliqué sa méthode (l. c., pag. 25).

On a alors

$$1-3x+2x^2+x^3-x^4=(1-x-x^2)(1-x)^2,$$

et par conséquent:

$$y=\frac{1+x}{1-x-x^2}-\frac{1}{(1-x)^2}.$$

En posant donc

$$y=\mathrm{K}_0+\mathrm{K}_1x+\mathrm{K}_2x^2+\ldots+\mathrm{K}_nx^n+\ldots$$

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\mathrm{S}'_0+\mathrm{S}'_1x+\mathrm{S}'_2x^2+\ldots+\mathrm{S}'_nx^n+\ldots,$$

on trouve:

$$\mathrm{K}_n=\mathrm{S}'_n+\mathrm{S}'_{n-1}-(n+1).$$

Mais, d'un autre côté, l'identité:

$$(1-x-x^2)(\mathrm{S}'_0+\mathrm{S}'_1x+\mathrm{S}'_2x^2+\ldots)=1$$

donne

$$\mathrm{S}'_{n+1}-\mathrm{S}'_n-\mathrm{S}'_{n-1}=0.$$

Donc on a

$$\mathrm{K}_n=\mathrm{S}'_{n+1}-(n+1).$$

Ce résultat coïncide avec celui qui a été trouvé par M. M. d'Ocagne. La quantité S'_{n+1} coïncide, en effet, avec le coefficient de x^{n+2} de la *série de Fibonacci.*

25. La méthode pour le développement des fonctions rationnelles qu'on vient de considérer, est applicable au développement du quotient de deux séries. Ainsi, si la fonction donnée est

$$y=\frac{\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1x+\mathrm{A}_2x^2+\ldots+\mathrm{A}_nx^n+\ldots}{1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_nx^n+\ldots},$$

on a premièrement

$$(1+p_1x+\ldots+p_nx^n+\ldots)^{-1}=1+\mathrm{S}'_1x+\mathrm{S}'_2x^2+\ldots$$

et ensuite

$$y=\mathrm{K}_0+\mathrm{K}_1x+\mathrm{K}_2x^2+\ldots+\mathrm{K}_nx^n+\ldots,$$

où

$$K_n = A_0 S'_n + A_1 S'_{n-1} + \ldots + A_{n-1} S'_1 + A_n,$$

$S'_1, S'_2, S'_3, \ldots$ étant déterminées par la formule (17) ou par la méthode indiquée au n.° 7.

Le cas où la fonction donnée a la forme:

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n}{(1 + p'_1 x + p'_2 x^2 + \ldots + p'_n x^n + \ldots)^h},$$

peut être réduit au précédent, en développant la puissance h de la série qui entre au dénominateur de cette fonction; mais il est préférable de déterminer K_n au moyen de la formule:

$$K_n = A_0 S_n^{(h)} + A_1 S_{n-1}^{(h)} + \ldots + A_{n-1} S_1^{(h)} + A_n,$$

où $S_1^{(h)}, S_2^{(h)}, \ldots$ représentent les coefficients des puissances de x dans le développement

$$(1 + p'_1 x + p'_2 x^2 + \ldots)^{-h} = 1 + S_1^{(h)} x + S_2^{(h)} x^2 + \ldots,$$

calculés au moyen de la formule (23) ou par la méthode donnée au n.° 12, en fonction de $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots$

Les cas où la fonction donnée est

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots}{M^h N^k P^l \ldots},$$

où M, N, P, ... représentent les séries ordonnées suivant les puissances de x:

$$M = 1 + p'_1 x + p'_2 x^2 + \ldots$$

$$N = 1 + r'_1 x + r'_2 x^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

peut être aussi réduit au premier; mais il est préférable de calculer les coefficients qui entrent dans le développement

$$M^{-h} N^{-k} P^{-l} \ldots = 1 + S'_1 x + S'_2 x^2 + \ldots$$

au moyen de la méthode de M. d'Ocagne, donnée au n.° 14, ou par la méthode que nous avons indiquée au n.° 15.

III.

Sur les valeurs que prennent en quelques cas particuliers les fonctions symétriques considérées.

26. En passant maintenant à une autre application de la doctrine exposée aux n.^{os} 1 à 4, différente par sa nature de la précédente, nous allons donner aux quantités *a, b, c*, ..., qui y figurent, divers systèmes de valeurs particulières qui mènent à quelques identités numériques intéressantes.

Supposons premièrement que *a, b, c*, ... représentent les nombres:

$$\cos\frac{\pi}{2m},\ \cos\frac{3\pi}{2m},\ \cos\frac{5\pi}{2m},\ \ldots,\ \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m},$$

et que m soit un entier pair.

La formule connue:

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos mx_1 = 2^{m-1}&\left[\cos x_1 - \cos\frac{\pi}{2m}\right]\left[\cos x_1 - \cos\frac{3\pi}{2m}\right]\\ &\left[\cos x_1 - \cos\frac{5\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos x_1 - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right]\end{aligned}\right.$$

donne, en dérivant ses deux membres par rapport à x_1, le résultat:

$$\begin{aligned} m\sin mx_1 = 2^{m-1}\sin x_1 \Bigg\{&\left[\cos x_1 - \cos\frac{3\pi}{2m}\right]\left[\cos x_1 - \cos\frac{5\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos x_1 - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right]\\ +&\left[\cos x_1 - \cos\frac{\pi}{2m}\right]\left[\cos x_1 - \cos\frac{5\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos x_1 - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right]\\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +&\left[\cos x_1 - \cos\frac{\pi}{2m}\right]\left[\cos x_1 - \cos\frac{3\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos x_1 - \cos\frac{(2m-3)\pi}{2m}\right]\Bigg\},\end{aligned}$$

qui, en posant

$$x_1 = \frac{\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \ldots, \frac{(2m-1)\pi}{2m},$$

donne ensuite:

$$m = 2^{m-1} \sin\frac{\pi}{2m}\left[\cos\frac{\pi}{2m} - \cos\frac{3\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos\frac{\pi}{2m} - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right],$$

$$-m = 2^{m-1} \sin\frac{3\pi}{2m}\left[\cos\frac{3\pi}{2m} - \cos\frac{\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos\frac{3\pi}{2m} - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right],$$

$$m = 2^{m-1} \sin\frac{5\pi}{2m}\left[\cos\frac{5\pi}{2m} - \cos\frac{\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos\frac{5\pi}{2m} - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right],$$

. . . .

$$-m = 2^{m-1} \sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}\left[\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} - \cos\frac{\pi}{2m}\right]\ldots\left[\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} - \cos\frac{(2m-3)\pi}{2m}\right].$$

On a donc (n.° 1)

$$\alpha_1 = \frac{2^{m-1}\sin\frac{\pi}{2m}}{m},$$

$$\beta_1 = -\frac{2^{m-1}\sin\frac{3\pi}{2m}}{m},$$

$$\gamma_1 = \frac{2^{m-1}\sin\frac{5\pi}{2m}}{m},$$

. . . .

$$\lambda_1 = -\frac{2^{m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}}{m};$$

et, par conséquent,

$$S_k = \frac{2^{m-1}}{m}\left[\cos^k\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m} - \cos^k\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}\right.$$

$$\left. + \cos^k\frac{5\pi}{2m}\sin\frac{5\pi}{2m} - \ldots - \cos^k\frac{(2m-1)\pi}{2m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right].$$

En ayant maintenant égard aux identités trigonométriques:

$$\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}=-\cos\frac{\pi}{2m},\qquad \sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}=\sin\frac{\pi}{2m},$$

$$\cos\frac{(2m-3)\pi}{2m}=-\cos\frac{3\pi}{2m},\qquad \sin\frac{(2m-3)\pi}{2m}=\sin\frac{3\pi}{2m},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

on peut encore écrire cette formule de la manière suivante:

$$S_k=\frac{2^m}{m}\left[\cos^k\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m}-\cos^k\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}\right.$$

$$\left.+\dots\pm\cos^k\frac{(m-3)\pi}{2m}\sin\frac{(m-3)\pi}{2m}\mp\cos^k\frac{(m-1)\pi}{2m}\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right],$$

quand k est un entier *impair*.

De cette égalité et des égalités (n.º 1) $S_0=0$, $S_1=0$, ..., $S_{m-2}=0$ on tire premièrement l'identité suivante:

$$(34)\quad \begin{cases}\cos^k\dfrac{\pi}{2m}\sin\dfrac{\pi}{2m}-\cos^k\dfrac{3\pi}{2m}\sin\dfrac{3\pi}{2m}+\cos^k\dfrac{5\pi}{2m}\sin\dfrac{5\pi}{2m}\\[2ex] +\dots\pm\cos^k\dfrac{(m-3)\pi}{2m}\sin\dfrac{(m-3)\pi}{2m}\mp\cos^k\dfrac{(m-1)\pi}{2m}\sin\dfrac{(m-1)\pi}{2m}=0,\end{cases}$$

quand $k=1, 3, 5, \dots, m-3$.

De la même égalité et de $S_{m-1}=1$ on tire l'identité:

$$(35)\quad \begin{cases}\cos^{m-1}\dfrac{\pi}{2m}\sin\dfrac{\pi}{2m}-\cos^{m-1}\dfrac{3\pi}{2m}\sin\dfrac{3\pi}{2m}+\cos^{m-1}\dfrac{5\pi}{2m}\sin\dfrac{5\pi}{2m}\\[2ex] +\dots\pm\cos^{m-1}\dfrac{(m-3)\pi}{2m}\sin\dfrac{(m-3)\pi}{2m}\mp\cos^{m-1}\dfrac{(m-1)\pi}{2m}\sin\dfrac{(m-1)\pi}{2m}=\dfrac{m}{2^m}.\end{cases}$$

27. Pour déterminer la valeur de la somme qui entre au premier membre des identités précédentes, dans le cas où $k>m-1$, remarquons que la formule (33) et la formule bien connue

$$(36)\quad \begin{cases}2\cos mx_1=(2\cos x_1)^m-m(2\cos x_1)^{m-2}\\[2ex] +\dfrac{m(m-3)}{1.2}(2\cos x_1)^{m-4}-\dfrac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos x_1)^{m-6}-\dots\end{cases}$$

Il convient encore de remarquer que le second membre de la formule (37) peut être mis sous la forme:

$$\frac{\mathrm{A}m^{\frac{1}{2}n+1}+\mathrm{B}m^{\frac{1}{2}n}+\dots}{2^{m+n}},$$

où

$$\mathrm{A}=\Sigma\frac{(-1)^{i+\beta+\varepsilon+\dots}\,i\,!}{\beta\,!\,\delta\,!\,\varepsilon\,!\dots\lambda\,!\,(2\,!)^{\delta}\,(3\,!)^{\varepsilon}\dots\left(\frac{m}{2}\,!\right)^{\lambda}},$$

au moyen de laquelle on voit qu'on a

$$\lim_{m=\infty}\left[\cos^k\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m}-\cos^k\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}+\cos^k\frac{5\pi}{2m}\sin\frac{5\pi}{2m}\right.$$
$$\left.-\dots\pm\cos^k\frac{(m-3)\pi}{2m}\sin\frac{(m-3)\pi}{2m}\mp\cos^k\frac{(m-1)\pi}{2m}\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]=0,$$

et

$$\lim_{m=\infty}\left[\left(2\cos\frac{\pi}{2m}\right)^k\sin\frac{\pi}{2m}-\left(2\cos\frac{3\pi}{2m}\right)^k\sin\frac{3\pi}{2m}-\dots\pm\left(2\cos\frac{(m-3)\pi}{2m}\right)^k\sin\frac{(m-3)\pi}{2m}\right.$$
$$\left.\mp\left(2\cos\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^k\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]\frac{1}{m^{\frac{1}{2}n+1}}=\frac{1}{2}\,\mathrm{A}.$$

28. Considérons maintenant la somme S_{-n}.

On a alors (n.° 4)

$$\mathrm{S}_{-n}=\frac{2^{m-1}}{m}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^n\frac{\pi}{2m}}-\frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^n\frac{3\pi}{2m}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2m}}{\cos^n\frac{5\pi}{2m}}-\dots+\frac{\sin\frac{(2m-3)\pi}{2m}}{\cos^n\frac{(2m-3)\pi}{2m}}-\frac{\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}}{\cos^n\frac{(2m-1)\pi}{2m}}\right],$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{S}_{-n}=\frac{2^{m}}{m}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^n\frac{\pi}{2m}}-\frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^n\frac{3\pi}{2m}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2m}}{\cos^n\frac{5\pi}{2m}}-\dots\pm\frac{\sin\frac{(m-3)\pi}{2m}}{\cos^n\frac{(m-3)\pi}{2m}}\mp\frac{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}{\cos^n\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right],$$

quand n est un nombre *impair*.

De cette formule et de la formule (14) du n.º 4 résulte l'identité:

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^n\frac{\pi}{2m}} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^n\frac{3\pi}{2m}} + \ldots \pm \frac{\sin\frac{(m-3)\pi}{2m}}{\cos^n\frac{(m-3)\pi}{2m}} \mp \frac{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}{\cos^n\frac{(m-1)\pi}{2m}} \\ &= \frac{m}{2^m}\sum(-1)^{i+1}\cdot\frac{i!\,p_{m-2}^{\beta}p_{m-4}^{\delta}\ldots p_0^{\lambda}}{p_m^{i+1}\,\beta!\,\delta!\ldots\lambda!}, \end{aligned}\right.$$

où le signe Σ s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation:

$$\beta + 2\delta + \ldots + \frac{m}{2}\lambda = \frac{n-1}{2},$$

et où i est donnée par l'égalité:

$$i = \beta + \delta + \ldots + \lambda.$$

Pour déterminer les quantités p_m, p_{m-2}, p_{m-4}, p_{m-6}, ..., qui entrent dans cette formule, on peut recourir à la formule connue:

$$\cos mx_1 = (-1)^{\frac{m}{2}}\left[1 - \frac{m^2}{2!}\cos^2 x_1 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}\cos^4 x_1 \right.$$
$$\left. - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\cos^6 x_1 + \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}\cos^n x_1\right],$$

qui ne diffère pas de (36) que par la forme, laquelle donne, en ayant égard à (33),

$$\left(x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(x - \cos\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots\left(x - \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right)$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}\left[1 - \frac{m^2}{2!}x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}x^4 - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}x^6 + \ldots\right].$$

On a donc

$$p_m = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}},\quad p_{m-2} = -\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}\cdot\frac{m^2}{2!},\quad p_{m-4} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}\cdot\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!},\ \ldots$$

L'égalité qu'on vient de démontrer, donne, en y posant $n=1, 3, 5, \ldots$,

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\frac{\pi}{2m}-\operatorname{tang}\frac{3\pi}{2m}+\operatorname{tang}\frac{5\pi}{2m}-\ldots\\ &\pm\operatorname{tang}\frac{(m-3)\pi}{2m}\mp\operatorname{tang}\frac{(m-1)\pi}{2m}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{m}{2^m};\end{aligned}\right.$$

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^3\frac{\pi}{2m}}-\frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^3\frac{3\pi}{2m}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2m}}{\cos^3\frac{5\pi}{2m}}-\ldots\\ &\pm\frac{\sin\frac{(m-3)\pi}{2m}}{\cos^3\frac{(m-3)\pi}{2m}}\mp\frac{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}{\cos^3\frac{(m-1)\pi}{2m}}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{m^3}{4};\end{aligned}\right.$$

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^5\frac{\pi}{2m}}-\frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^5\frac{3\pi}{2m}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2m}}{\cos^5\frac{5\pi}{2m}}-\ldots\\ &\pm\frac{\sin\frac{(m-3)\pi}{2m}}{\cos^5\frac{(m-3)\pi}{2m}}\mp\frac{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}{\cos^5\frac{(m-1)\pi}{2m}}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{m^3(5m^2+4)}{48},\end{aligned}\right.$$

quand $m>2$; etc.

29. Nous avons supposé dans tout ce qui précède que m est un entier *pair*. Nous allons considérer maintenant le cas où m est *impair*, et, pour cela, nous donnerons à $a, b, c, \ldots$ les valeurs:

$$\cos\frac{\pi}{2m},\quad \cos\frac{3\pi}{2m},\quad \cos\frac{5\pi}{2m},\ \ldots,\quad \cos\frac{(m-2)\pi}{2m},$$

$$\cos\frac{(m+2)\pi}{2m},\ \cos\frac{(m+4)\pi}{2m},\ \ldots,\ \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}.$$

En écrivant alors la formule (33) de la manière suivante:

$$\frac{\cos mx_1}{\cos x_1}=2^{m-1}\left(\cos x_1-\cos\frac{\pi}{2m}\right)\ldots\left(\cos x_1-\cos\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)$$

$$\left(\cos x_1-\cos\frac{(m+2)\pi}{2m}\right)\ldots\left(\cos x_1-\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right),$$

en dérivant, par rapport à x_1, les deux membres de cette identité en en posant ensuite:

$$x = \frac{\pi}{2m}, \quad \frac{3\pi}{2m}, \ldots, \quad \frac{(m-2)\pi}{2m}, \quad \frac{(m+2)\pi}{2m}, \ldots, \quad \frac{(2m-1)\pi}{2m},$$

on trouve

$$\frac{m}{\cos\frac{\pi}{2m}} = 2^{m-1} \sin\frac{\pi}{2m}\left(\cos\frac{\pi}{2m} - \cos\frac{3\pi}{2m}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2m} - \cos\frac{5\pi}{2m}\right)\ldots,$$

$$-\frac{m}{\cos\frac{3\pi}{2m}} = 2^{m-1} \sin\frac{3\pi}{2m}\left(\cos\frac{3\pi}{2m} - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{2m} - \cos\frac{5\pi}{2m}\right)\ldots,$$

$$\frac{m}{\cos\frac{5\pi}{2m}} = 2^{m-1} \sin\frac{5\pi}{2m}\left(\cos\frac{5\pi}{2m} - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{2m} - \cos\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots,$$

....

$$\frac{m}{\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}} = 2^{m-1} \sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}\left(\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} - \cos\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots.$$

On a donc

$$\alpha_1 = \frac{2^{m-2}\sin\frac{\pi}{2m}}{m}, \quad \beta_1 = -\frac{2^{m-2}\sin\frac{3\pi}{2m}}{m}, \ldots, \quad \lambda_1 = \frac{2^{m-2}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}}{m},$$

et, par conséquent,

$$S_k = \frac{2^{m-1}}{m}\left[\cos^{k+1}\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m} - \cos^{k+1}\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m} + \ldots\right.$$
$$\left. - \cos^{k+1}\frac{(2m-3)\pi}{2m}\sin\frac{(2m-3)\pi}{2m} + \cos^{k+1}\frac{(2m-1)\pi}{2m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right],$$

ou encore, en supposant que k est un nombre *impair*,

$$S_k = \frac{2^m}{m}\left[\cos^{k+1}\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m} - \cos^{k+1}\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m} + \ldots\right.$$
$$\left. \pm \cos^{k+1}\frac{(m-4)\pi}{2m}\sin\frac{(m-4)\pi}{2m} \mp \cos^{k}\frac{(m-2)\pi}{2m}\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right].$$

Cette formule donne, en premier lieu (n.° 1),

$$
(44)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos^{k+1}\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m}-\cos^{k+1}\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}+\dots\\
&\pm\cos^{k+1}\frac{(m-4)\pi}{2m}\sin\frac{(m-4)\pi}{2m}\mp\cos^{k+1}\frac{(m-2)\pi}{2m}\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}=0,
\end{aligned}\right.
$$

quand $k=1,\ 3,\ 5,\ \dots,\ m-4$.

La même formule donne ensuite:

$$
(45)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos^{m-1}\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m}-\cos^{m-1}\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}+\dots\\
&\pm\cos^{m-1}\frac{(m-4)\pi}{2m}\sin\frac{(m-4)\pi}{2m}\mp\cos^{m-1}\frac{(m-2)\pi}{2m}\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}=\frac{m}{2^m}.
\end{aligned}\right.
$$

On voit donc que les formules (34) et (35), que nous avions démontrées précédemment pour le cas où m est un nombre pair, ont encore lieu quand ce nombre est impair.

30. Pour considérer maintenant le cas où $k>m-2$, remarquons que les formules (33) et (36) donnent, en posant $\cos x_1=x$,

$$
\left(x-\cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{2m}\right)\dots\left(x-\cos\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)
$$

$$
\left(x-\cos\frac{(m+2)\pi}{2m}\right)\dots\left(x-\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right)
$$

$$
=x^{m-1}-\frac{m}{2^2}x^{m-3}+\frac{m(m-3)}{1.2.2^4}x^{m-5}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3.2^6}x^{m-7}+\dots,
$$

et qu'on a donc la formule:

$$
(46)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos^{k+1}\frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{2m}-\cos^{k+1}\frac{3\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}+\dots\\
&\pm\cos^{k+1}\frac{(m-4)\pi}{2m}\sin\frac{(m-4)\pi}{2m}\mp\cos^{k+1}\frac{(m-2)\pi}{2m}\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\\
&=\frac{m}{2^m}\Sigma(-1)^i\cdot\frac{i!\,p_2^\beta p_4^\delta\dots p_{m-1}^\lambda}{\beta!\,\delta!\dots\lambda!},
\end{aligned}\right.
$$

où le sigue Σ s'étend aux solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$
\beta+2\delta+\dots+\frac{m-1}{2}\lambda=\frac{n}{2},
$$

et où

$$i=\beta+\delta+\ldots+\lambda,\quad k=m+n-2,$$

$$p_2=-\frac{m}{2^2},\quad p_4=\frac{m(m-3)}{1.2.2^4},\quad p_6=-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3.2^6},\ \ldots$$

laquelle est semblable à la formule (37).

On trouve aussi, quand n est *impair*,

$$S_{-n}=\frac{2^m}{m}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{\pi}{2m}}-\frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{3\pi}{2m}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{5\pi}{2m}}-\ldots\pm\frac{\sin\frac{(m-4)\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{(m-4)\pi}{2m}}\mp\frac{\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right],$$

et, par conséquent,

$$(47)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{\pi}{2m}}-\frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{3\pi}{2m}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{5\pi}{2m}}-\ldots\mp\frac{\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}}{\cos^{n-1}\frac{(m-2)\pi}{2m}}\\&=\frac{m}{2^n}\sum(-1)^{i-1}.\frac{i!\,p_{m-3}^{\beta}\,p_{m-5}^{\delta}\cdots p_0^{\lambda}}{p_{m-1}^{i+1}\,\beta!\,\delta!\ldots\lambda!},\end{aligned}\right.$$

où β, δ, ..., λ représentent les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation:

$$\beta+2\delta+\ldots+\frac{m-1}{2}\lambda=\frac{n-1}{2},$$

et où

$$i=\beta+\delta+\ldots+\lambda.$$

Pour déterminer les constantes p_{m-1}, p_{m-3}, p_{m-5}, ..., qui entrent dans cette formule, on peut recourir à l'égalité connue

$$\frac{\cos mx_1}{\cos x_1}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[m-\frac{m(m^2-1^2)}{2.3}\cos^2 x_1\right.$$
$$\left.+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}\cos^4 x_1-\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\cos^{m-1}x_1\right],$$

laquelle, combinée avec la formule (33), donne

$$\left(x-\cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)\left(x-\cos\frac{(m+2)\pi}{2m}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right)$$
$$=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}}\left[m-\frac{m(m^2-1^2)}{2.3}x^2+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}x^4-\ldots\right].$$

*

et, par conséquent,

$$p_{m-1} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} . m}{2^{m-1}}, \quad p_{m-3} = -\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}} \cdot \frac{m(m^2-1)}{2.3},$$

$$p_{m-5} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}} \cdot \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}, \ldots$$

La formule précédente donne, en posant $n = 1, 3, 5, \ldots,$

$$\sin\frac{\pi}{2m} - \sin\frac{3\pi}{2m} + \ldots \mp \sin\frac{(m-2)\pi}{2m} = \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{2};$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\cos^2\frac{\pi}{2m}} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2m}}{\cos^2\frac{3\pi}{2m}} + \ldots \mp \frac{\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}}{\cos^2\frac{(m-2)\pi}{2m}} = (-1)^{\frac{m+1}{2}} . \frac{m^2-1}{12};$$

. . . .

31. Une autre application analogue à la précédente est celle dans laquelle on donne à $a, b, c, \ldots$ les valeurs :

$$\cos\frac{\pi}{m}, \quad \cos\frac{2\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \cos\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}, \quad \cos\frac{\left(\frac{1}{2}m+1\right)\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \cos\frac{(m-1)\pi}{m}.$$

En supposant que m est un nombre *pair*, et en partant de l'égalité

$$\frac{\sin mx_1}{\sin x_1 \cos x_1} = 2^{m-1}\left(\cos x_1 - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x_1 - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\ldots$$

$$\left(\cos x_1 - \cos\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}\right)\left(\cos x_1 - \cos\frac{\left(\frac{1}{2}m+1\right)\pi}{m}\right)\ldots\left(\cos x_1 - \cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right)$$

on obtient la suivante, quand k est *impair :*

$$S_k = \frac{2^m}{m}\left[\cos^{k+1}\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^{k+1}\frac{2\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m} + \ldots \pm \cos^{k+1}\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}\sin^2\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}\right].$$

On a donc

$$\cos^{k+1}\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{m}-\cos^{k+1}\frac{2\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}+\ldots\pm\cos^{k+1}\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}\,\mathrm{sen}^2\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}=0,$$

quand $k=1, 3, 5, \ldots, m-5$.

Quand $k=m-3$, on a

$$\cos^{m-2}\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{m}-\cos^{m-2}\frac{2\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}+\ldots\pm\cos^{m-2}\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}\sin^2\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}=\frac{m}{2^m}.$$

Quand $k>m-3$, on trouve

$$\cos^{k+1}\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{m}-\cos^{k+1}\frac{2\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}+\ldots$$

$$\pm\cos^{k+1}\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}\sin^2\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}=\frac{m}{2^m}\Sigma(-1)^i\cdot\frac{i!\,p_2^\beta p_4^\delta\ldots p_{m-2}^\lambda}{\beta!\,\delta!\ldots\lambda!},$$

où $\beta, \delta, \ldots, \lambda$ sont les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\beta+2\delta+\ldots+\frac{m-2}{2}\lambda=\frac{n}{2},$$

et

$$i=\beta+\delta+\ldots+\lambda,\quad k=m+n-3.$$

On voit au moyen de la formule:

$$\frac{\sin mx_1}{\sin x_1\cos x_1}=2\left[(2\cos x_1)^{m-2}-(m-2)(2\cos x_1)^{m-4}+\frac{(m-3)(m-5)}{2!}(2\cos x_1)^{m-6}-\ldots\right]$$

que les valeurs de $p_2, p_4, \ldots$ sont alors données par les égalités

$$p_2=-\frac{m-2}{2^2},\quad p_4=\frac{(m-3)(m-5)}{2!\,2^4},\quad p_6=-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{3!\,2^6},\ldots$$

On voit encore, au moyen de la formule

$$\frac{\sin mx_1}{\sin x_1\cos x_1}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[m-\frac{m(m^2-2^2)}{3!}\cos^2 x_1+\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{5!}\cos^4 x_1-\ldots\right],$$

qu'on a, quand n est *impair*,

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\cos^{n-1}\frac{\pi}{m}} - \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{m}}{\cos^{n-1}\frac{2\pi}{m}} + \ldots \pm \frac{\sin^2 \frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}}{\cos^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}m-1\right)\pi}{m}}$$

$$= \frac{m}{2^m}\Sigma(-1)^{i-1}\cdot\frac{i!\,p_{m-4}^{\beta}p_{m-6}^{\delta}\cdots p_0^{\lambda}}{p_{m-2}^{i+1}\,\beta!\,\delta!\ldots\lambda!},$$

$$\beta+2\delta+\ldots+\frac{m-2}{2}\lambda=\frac{n-1}{2},$$

$$i=\beta+\delta+\ldots+\lambda.$$

On considère d'une manière analogue le cas où, m étant impair, on donne à $a, b, c, \ldots$ les valeurs

$$\cos\frac{\pi}{m},\quad \cos\frac{2\pi}{m},\quad \cos\frac{3\pi}{m},\quad \ldots,\quad \cos\frac{(m-1)\pi}{m}.$$

32. En passant à une autre application, supposons que $a, b, c, \ldots$ sont les racines de l'équation

$$x^m+\frac{1}{2}\left[x^{m-1}+\frac{x^{m-2}}{2!}+\frac{x^{m-3}}{3!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right]=0,$$

et que, par conséquent,

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots=1+\frac{1}{2}\left[x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^m}{m!}\right].$$

La formule (7) donne alors

$$S_{m+n-1}=\Sigma(-1)^i\cdot\frac{i!}{2^i\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(m!)^{\lambda}},$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha+2\beta+\ldots+m\lambda=n,$$

et

$$i=\alpha+\beta+\ldots+\lambda.$$

En comparant cette formule à l'expression suivante des *nombres de Bernoulli,* que nous avons donnée dans notre *Curso de Analyse* (*Calculo differencial,* 3[e] éd., 1896, p. 236):

$$\mathrm{B}_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{(n-1)!}{2^{n+1}-1} \Sigma (-1)^i \frac{i!}{2^{i-1}\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\ldots(n!)^\lambda},$$

où

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n,$$

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

on trouve

$$\mathrm{S}_{m+n-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2(2^{n+1}-1)}{(n+1)!} \mathrm{B}_n,$$

quand $n < m$.

Nous avons ainsi une formule qui lie les valeurs de S_{m+n-1} à celles des *nombres de Bernoulli,* et qui fait voir que, quand n est un nombre *pair,* on a $\mathrm{S}_{m+n-1} = 0$.

33. Comme dernière application nous allons chercher les coefficients qui entrent dans le développement

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-mx)} = \mathrm{S}'_0 + \mathrm{S}'_1 x + \mathrm{S}'_2 x^2 + \ldots + \mathrm{S}'_n x^n + \ldots$$

On a premièrement (n.° 2)

$$\mathrm{S}'_n = \mathrm{S}_{m+n-1}.$$

Mais (n.° 1)

$$\mathrm{S}_{m+n-1} = (-1)^{m-1}\left[\frac{1^{m+n-1}}{(m-1)!} - \frac{2^{m+n-1}}{1!\,(m-2)!} + \frac{3^{m+n-1}}{2!\,(m-3)!} - \ldots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{m^{m+n-1}}{(m-1)!}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{m!}\left[\binom{m}{1} 1^{m+n} - \binom{m}{2} 2^{m+n} + \binom{m}{3} 3^{m+n} - \ldots + (-1)^{m-1} m^{m+n}\right].$$

Donc, en ayant égard à une formule de la théorie des différences finies, bien connue, on trouve

$$\mathrm{S}'_n = \frac{1}{m!} \Delta^m 0^{m+n}.$$

En remarquant qu'on a aussi (n.° 1)

$$\mathrm{S}_{m+n-1} = \Sigma_1 1^r . 2^t . 3 \ldots m^s,$$

où $p, q, r, \ldots, s$ sont les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$p+q+r+\ldots+s=n,$$

on peut encore écrire l'égalité précédente de la manière suivante :

$$\Sigma_1 1^p . 2^q . 3^r \ldots m^s = \frac{1}{m!} \Delta^m 0^{m+n}.$$

Cette formule, donnée par M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3ᵉ série, t. II), est un cas particulier d'une autre, attribuée par M. Cesàro (*Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. IV, p. 69) à Fergola, que nous obtenons en donnant, dans l'identité de Gauss, à $a, b, c, \ldots$ les valeurs

$$t, \quad t+1, \quad t+2, \quad \ldots, \quad t+m.$$

On trouve ainsi

$$S_{m+n} = (-1)^m \left[\frac{t^{m+n}}{m!} - \frac{(t+1)^{m+n}}{1.(m-1)!} + \frac{(t+2)^{m+n}}{2!(m-2)!} - \ldots + (-1)^m \frac{(t+m)^{m+n}}{m!} \right]$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} \left[t^{m+n} - \binom{m}{1} (t+1)^{m+n} + \binom{m}{2} (t+2)^{m+n} - \ldots + (-1)^m (t+m)^{m+n} \right],$$

et, par conséquent,

$$S_{m+n} = \frac{(-1)^m}{m!} \Delta^m t^{m+n}.$$

Mais on a aussi

$$S_{m+n} = \Sigma_1 t^p (t+1)^q (t+2)^r \ldots (t+m)^s, \quad p+q+r+\ldots+s=n.$$

Donc

$$\Sigma_1 t^p (t+1)^q \ldots (t+m)^s = \frac{(-1)^m}{m!} \Delta^m t^{m+n}.$$

XI

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES DU SINUS

(Journal für reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle,
Band CXXXI. Berlin, 1906)

INTRODUCTION.

1. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par celle des ovales représentés par l'équation $|\sin z| = c$, où $z = x_1 + iy_1$ et $c \leq 1$, qui a le centre à l'origine des coordonées. Nous avons démontré dans un travail publié au tome CXVI, pag. 14, de ce journal, que la fonction $f(x)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ au moyen de la formule

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin^m x, \tag{1.}$$

où

$$A_0 = f(0),$$

$$A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{(2n)!},$$

$$A_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{(2n+1)!}.$$

$S_{2n}^{(m)}$ représentant la somme des produits distincts des nombres

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ \ldots\ (2n-2)^2,$$

pris m à m, et $s_{2n+1}^{(m)}$ la somme des produits distincts des nombres

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots\ (2n-1)^2,$$

pris aussi m à m.

Nous allons dans ce travail faire application de cette formule à la détermination de quelques intégrales définies particulières et à la démonstration de quelques relations entre les nombres de Bernoulli et entre les nombres d'Euler, qui, nous croyons, n'ont pas encore été remarquées.

I.

Sur quelques intégrales définies.

2. On sait que, si la fonction $f(z)$ est développable en série de la forme (1.), on a

$$A_m = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z \, dz}{\sin^{m+1} z} \, .$$

le contour de l'intégration étant une circonférence de rayon égal à β, ayant le centre à l'origine des coordonnées, telle que la fonction considérée soit holomorphe dans l'aire qu'elle limite.

En posant dans cette égalité

$$z = \beta e^{i\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\beta e^{i\theta}) \cos(\beta e^{i\theta}) e^{i\theta}}{\sin^{m+1}(\beta e^{i\theta})} \, d\theta = \frac{2 A_m \pi}{\beta} \, ,$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\beta e^{i\theta}) \cos(\beta e^{i\theta}) \sin^{m+1}(\beta e^{-i\theta}) e^{i\theta} \, d\theta}{\left[e^{2\beta \sin\theta} - 2\cos 2(\beta \cos\theta) + e^{-2\beta \sin\theta}\right]^{m+1}} = \frac{A_m \pi}{2^{2m+1} \beta} \, .$$

En supposant maintenant que $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... sont des quantités réelles et en posant

$$F(i\theta) = f(\beta e^{i\theta}) \cos(\beta e^{i\theta}) \sin^{m+1}(\beta e^{-i\theta}) e^{i\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta) - F(-i\theta)] \, d\theta}{\left[e^{2\beta \sin\theta} - 2\cos 2(\beta \cos\theta) + e^{-2\beta \sin\theta}\right]^{m+1}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta) + F(-i\theta)] \, d\theta}{\left[e^{2\beta \sin\theta} - 2\cos 2(\beta \cos\theta) + e^{-2\beta \sin\theta}\right]^{2n+1}}$$

$$= \frac{[f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)]\pi}{(2n)! \, 2^{4n} \beta} \, ,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta) + F(-i\theta)] \, d\theta}{\left[e^{2\beta \sin\theta} - 2\cos 2(\beta \cos\theta) + e^{-2\beta \sin\theta}\right]^{2n+2}}$$

$$= \frac{[f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)]\pi}{(2n+1)! \, 2^{4n+2} \beta} \, .$$

On peut écrire ces égalités *symboliquement* de la manière suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)+F(-i\theta)]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}$$

$$=\frac{f^2(0)\,[f^2(0)+2^2]\,[f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{(2n)!\,2^{4n}}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)-F(-i\theta)]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+2}}$$

$$=\frac{f(0)\,[f^2(0)+1^2]\,[f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{(2n+1)!\,2^{4n+2}}\cdot\frac{\pi}{\beta}.$$

3. Nous allons considérer maintenant quelques cas particuliers. Soit premièrement

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}.$$

On a

$$\frac{1}{\cos x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\sin^{2n}x,$$

et, par conséquent,

$$\int_s \frac{dz}{\sin^{2n+1}z}=2i\pi\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n},$$

$$\int_s \frac{dz}{\sin^{2n}z}=0;$$

ou, en posant $z=\beta e^{i\theta}$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{2n+1}(\beta e^{-i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}=\frac{1.3\ldots(2n-1)\,\pi}{2^{4n+1}.2.4\ldots2n\beta},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{2n}(\beta e^{-i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n}}=0.$$

Si l'on remarque maintenant qu'on a

$$\sin(\beta e^{-i\theta})=\sin(\beta\cos\theta)\,\frac{e^{\beta\sin\theta}+e^{-\beta\sin\theta}}{2}+i\cos(\beta\cos\theta)\,\frac{e^{\beta\sin\theta}-e^{-\beta\sin\theta}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}(\cos\omega+i\sin\omega),$$

où

$$\omega = \text{arc tang}\,\frac{e^{-\beta\sin\theta} - e^{\beta\sin\theta}}{e^{-\beta\sin\theta} + e^{\beta\sin\theta}}\cot(\beta\cos\theta),$$

on peut encore écrire

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[\theta + (2n+1)\omega] + i\sin[\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{3n}.n!}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{3n}.n!}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = 0.$$

On trouve de la même manière

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta - 2n\omega)\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{n}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta + 2n\omega)\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{n}} = 0.$$

4. Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = x^{2k}.$$

On a vu, dans le travail précédemment rapporté, que le développement de x^{2k} en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ est donné par la formule

$$x^{2k} = \sin^{2k} x\left[1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{2n}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\ldots 2n}\sin^{2(n-k)} x\right].$$

Nous avons donc

$$\int_s \frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^{2n+1} z} = 2i\pi\,\frac{S_{2n}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\ldots 2n}, \qquad \int_s \frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^{2n} z} = 0.$$

Mais

$$\int_s \frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^m z} = \frac{2k}{m-1}\int_s \frac{z^{2k-1}\,dz}{\sin^{m-1} z}.$$

Donc

$$\int_s \frac{z^{2k-1}\,dz}{\sin^{2n} z} = \frac{2i\pi\, S_{2n}^{n-k}}{2k(2k+1)(2k+2)\dots(2n-1)}, \quad \int_s \frac{z^{2l-1}\,dz}{\sin^{2n-1} z} = 0.$$

En posant maintenant $z = \beta e^{i\theta}$ et en employant ensuite une analyse semblable à celle qu'on a appliquée au cas considéré dans le n° précédent, ou trouve les résultats suivants:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2(k\theta + n\omega)\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\beta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^n} = \frac{S_{2n}^{n-k}}{2^{2n-1}.\,2k(2k+1)\dots(2n-1)}\cdot\frac{\pi}{\beta^{2k}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2(k\theta + n\omega)\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^n} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\left[2k\theta + (2n-1)\omega\right]d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n-1}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left[2k\theta + (2n-1)\omega\right]d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n-1}{2}}} = 0.$$

Il convient de remarquer le cas particulier où $k=1$. On a alors

$$S_{2n}^{n-1} = 2^2.\,4^2.\,6^2\dots(2n-2)^2,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2(\theta + n\omega)\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^n} = \frac{\left[(n-1)!\right]^2}{2(2n-1)!}\cdot\frac{\pi}{\beta^2}.$$

5. On considère de la même manière la fonction x^{2k+1}, dont le développement ordonné suivant les puissances de $\sin x$, donné dans le travail précédemment indiqué, est le suivant:

$$x^{2k+1} = \sin^{2k+1} x\left[1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{2n+1}^{n-k}}{(2k+2)(2k+3)\dots(2n+1)}\sin^{2(n-k)} x\right].$$

On a d'abord

$$\int_c \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+2} z} = 2i\pi \frac{s^{n-k}_{2n+1}}{(2k+2)(2k+3)\dots(2n+1)},$$

$$\int_c \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+1} z} = 0.$$

La première égalité donne ensuite

$$\int_c \frac{z^{2k}\,dz}{\sin^{2n+1} z} = \frac{2n+1}{2k+1}\int_c \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+2} z} = 2i\pi \frac{(2n+1)\,s^{n-k}_{2n+1}}{(2k+1)(2k+2)\dots(2n+1)},$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{(2k+1)\theta i}\sin^{2k+1}(\beta e^{-\theta i})\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos(2\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n+1}{2}}}$$

$$= \frac{(2n+1)\,s^{n-k}_{2n+1}}{2^{n-1}(2k+1)(2k+2)\dots(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{\beta^{2n+1}}.$$

On trouve, au moyen de cette égalité, les résultats suivants:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos(2\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n+1}{2}}}$$

$$= \frac{s^{n-k}_{2n+1}}{2^{n}(2k+1)(2k+2)\dots 2n}\cdot\frac{\pi}{\beta^{2n+1}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[(2k+1)\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos(2\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n+1}{2}}} = 0.$$

On trouve aussi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta + 2n\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos(2\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{n}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[(2k+1)\theta + 2n\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos(2\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{n}} = 0.$$

Les formules obtenues au n.° 3 sont comprises entre celles qu'on vient de trouver, comme on peut le voir en posant $k = 0$ et en ayant égard à l'égalité

$$s^{n}_{2n+1} = 3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7^2 \dots (2n-1)^2.$$

II.

Sur quelques relations entre les nombres de Bernoulli et entre les nombres d'Euler

6. Appliquons la formule (1.) à la fonction $\dfrac{x}{\sin x}$.

Comme on a

$$f(0)=1,\ f''(0)=2(2-1)\,B_1,\ f^{(4)}(0)=2(2^3-1)\,B_3,\ \ldots$$

$$f^{(2n)}(0)=2(2^{2n-1}-1)\,B_{2n-1}$$

et

$$f'(0)=f'''(0)=\ldots=f^{(2n-1)}(0)=0,$$

B_1, B_3, B_5, ... représentant les *nombres de Bernoulli*, on trouve

$$x=\sin x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n-1}-1)\,B_{2n-1}+S_{2n}^{1}(2^{2n-3}-1)\,B_{2n-3}+\ldots+S_{2n}^{n-1}(2-1)\,B_1}{(2n)!}\sin^{2n+1}x.$$

Mais, on a

$$x=\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n(2n+1)}\sin^{2n+1}x.$$

En comparant ces deux résultats, on obtient la relation de récurrence entre les *nombres de Bernoulli*:

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned}&(2^{2n-1}-1)\,B_{2n-1}+S_{2n}^{1}(2^{2n-3}-1)\,B_{2n-3}+\ldots+S_{2n}^{n-1}(2-1)\,B_1\\&\qquad=\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{2(2n+1)}.\end{aligned}\right.$$

Il résulte immédiatement de cette identité la représentation suivante des nombres considérés au moyen d'un determinant:

$$B_{2n-1} = \frac{1}{2(2^{2n-1}-1)} \begin{vmatrix} u_{2n-1} & S^{(1)}_{2n} & S^{(2)}_{2n} & \vdots & S^{(n-1)}_{2n} \\ u_{2n-3} & 1 & S^{(1)}_{2n-1} & \vdots & S^{(n-2)}_{2n-1} \\ u_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & S^{(n-3)}_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$u_{2n-1} = \frac{[1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)]^2}{2n+1}, \quad u_{2n-3} = \frac{[1\,.\,3\,\ldots\,(2n-3)]^2}{2n-1}, \quad \ldots, \quad u_1 = \frac{1}{3}.$$

En posant

$$B'_{2n-1} = (2^{2n-1}-1)\,B_{2n-1}, \quad B'_{2n-3} = (2^{2n-3}-1)\,B_{2n-3}, \quad \ldots,$$

ou peut écrire *symboliquement* la formule (2.) de la manière suivante:

$$B'[B'^2+2^2][B'^2+4^2]\ldots[B'^2+(2n-2)^2] = \frac{1}{2}\,u_{2n-1},$$

où on doit remplacer, après les multiplications, les exposants des puissances de B′ par des indices.

7. En partant de la fonction tang x et en employant une analyse semblable, on trouve une autre relation de récurrence entre les nombres de *Bernoulli* et une autre expression au moyen d'un déterminant des mêmes nombres, où figurent les quantités représentées par $s^{(m)}_{2n+1}$.

On a, en effet,

$$f'(0) = \frac{2(2^2-1)}{1}B_1, \quad f'''(0) = \frac{2^3(2^4-1)}{2}B_3, \ \ldots, \ f^{(2n+1)}(0) = \frac{2^{2n+1}(2^{2n+2}-1)}{n+1}B_{2n+1},$$

$$f(0) = f''(0) = \ldots = f^{(2n)}(0) = 0,$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\frac{2^{2n+2}-1}{n+1}B_{2n+1} + 2^{2n-1}\frac{2^{2n}-1}{n}s^{(1)}_{2n+1}B_{2n-1} + \ldots + 2\,\frac{2^2-1}{1}s^{(n)}_{2n+1}B_1}{(2n+1)!}\sin^{2n+1}x.$$

et en le comparant au développement suivant:

$$x\cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n+1)}\sin^{2n}x,$$

que nous allons démontrer.

Posons

$$x\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}\sin^{2n}x$$

et, par conséquent,

$$\frac{z\cot z\cos z}{\sin^{2n+1}z} = \frac{\cos z}{\sin^{2n+1}z}\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}\sin^{2n}z,$$

et intégrons les deux membres de cette égalité le long d'une circonférence s ayant le centre à l'origine des coordonnées et dont le rayon soit assez petit pour que cette série soit convergente dans l'aire que la circonférence limite. Puisqu'on a

$$\int_s \frac{\cos z\,dz}{\sin^m z} = 0, \quad (m \gtrless 1)$$

et

$$\int_s \frac{\cos z\,dz}{\sin z} = 2i\pi,$$

on trouve ainsi

$$A_{2n} = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z}.$$

Mais, nous avons

$$\int_s \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z} = \int_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n+2}z} - \int_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n}z};$$

et, puisque

$$z^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{n}\sin^{2n}z,$$

et, par conséquent

$$z = \cos z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)}\sin^{2n-1}z,$$

nous avons aussi

$$\int_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n}z} = 2i\pi\,\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)}, \quad \int_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n+2}z} = 2i\pi\,\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)}.$$

Donc

$$A_{2n} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1} z} = -\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}.$$

Le deuxième développement de $x\cot x$ précédemment indiqué résulte immédiatement de cette égalité, et, en le comparant au premier, on trouve la relation

$$(4.)\qquad \begin{cases} 2^{2n}B_{2n-1} + S_{2n}^{1}\,2^{2n-2}\,B_{2n-3} + \ldots + S_{2n}^{n-1}\,2^2 B_1 \\ \qquad = \dfrac{[2.4.6\ldots(2n-2)]^2\,2n}{2n+1}, \end{cases}$$

qui donne

$$B_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n}}\begin{vmatrix} u_{2n-2} & S_{2n}^{1} & S_{2n}^{2} & \vdots & S_{2n}^{n-1} \\ u_{2n-4} & 1 & S_{2n-1}^{1} & \vdots & S_{2n-1}^{n-2} \\ u_{2n-6} & 0 & 1 & \vdots & S_{2n-2}^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$u_{2n-2} = \frac{[2.4\ldots(2n-2)]^2\,2n}{2n+1},\quad u_{2n-4} = \frac{[2.4\ldots(2n-4)]^2\,2(n-1)}{2n-1},\quad \ldots,\quad u_0 = \frac{2}{3}.$$

9. On peut trouver pour les *nombres d'Euler* des relations analogues à celles qu'on vient d'obtenir pour les nombres de *Bernoulli*.

En effet, en représentant ces nombres par E_2, E_4, E_6, ..., on a

$$(5.)\qquad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \frac{E_6}{6!}x^6 + \ldots;$$

et, par conséquent, en appliquant la formule (1.) à la fonction $\frac{1}{\cos x}$, on trouve

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_{2n} + S_{2n}^{1}E_{2n-2} + \ldots + S_{2n}^{n-1}E_2}{(2n)!}\sin^{2n} x.$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\sin^{2n} x + \ldots$$

Donc nous avons la relation de récurrence suivante entre les nombres d'*Euler:*

$$(6.)\qquad E_{2n}+S_{2n}^{(1)}E_{2(n-1)}+\ldots+S_{2n}^{(n-1)}E_2=[1.3.5\ldots(2n-1)]^2,$$

dont il résulte l'expression, au moyen d'un déterminant, des mêmes nombres:

$$E_{2n}=\begin{vmatrix} a_{2n-1} & S_{2n}^{(1)} & S_{2n}^{(2)} & \vdots & S_{2n}^{(n-1)} \\ a_{2n-3} & 1 & S_{2(n-1)}^{(1)} & \vdots & S_{2(n-1)}^{(n-2)} \\ a_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & S_{2(n-2)}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix}.$$

où

$$a_{2n-1}=[1.3.5\ldots(2n-1)]^2,\quad a_{2n-3}=[1.3.5\ldots(2n-3)]^2,\ \ldots$$

10. Considérons encore la fonction $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, pour trouver une autre relation entre les nombres d'*Euler*, où figurent les nombres représentés par $s_{2n+1}^{(m)}$.

Puisque

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=E_2 x+\frac{E_4}{3!}x^3+\frac{E_6}{5!}x^5+\ldots,$$

on a

$$f(0)=0,\quad f'(0)=E_2,\quad f''(0)=0,\ \ldots,\quad f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=E_{2n+2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n+2}+s_{2n+1}^{(1)}E_{2n}+\ldots+s_{2n+1}^{(n)}E_2}{(2n+1)!}\sin^{2n+1}x.$$

Mais on a aussi

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x+\sin^3 x+\sin^5 x+\ldots$$

Donc

$$(7.)\qquad E_{2n+2}+s_{2n+1}^{(1)}E_{2n}+\ldots+s_{2n+1}^{(n)}E_2=(2n+1)!$$

et

$$E_{2n+2}=\begin{vmatrix} (2n+1)! & s_{2n+1}^{(1)} & s_{2n+1}^{(2)} & \vdots & s_{2n+1}^{(n)} \\ (2n-1)! & 1 & s_{2n-1}^{(1)} & \vdots & s_{2n-1}^{(n-1)} \\ (2n-3)! & 0 & 1 & \vdots & s_{2n-3}^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Les formules (6.) et (7.) peuvent être écrites symboliquement de la manière suivante:

$$E^2\,[E^2+2^2]\,[E^2+4^2]\ldots[E^2+(2n-2)^2]=[1.3\ldots(2n-1)]^2.$$

$$E^2\,[E^2+1^2]\,[E^2+3^2]\ldots[E^2+(2n-1)^2]=(2n+1)!.$$

11. La méthode qu'on vient d'employer pour trouver quelques relations entre les nombres de *Bernoulli* et d'*Euler* donne aussi des relations entre les nombres représentés précédemment par $S_n^{(m)}$ et $s_{2n+1}^{(m)}$. Nous indiquerons ici la suivante

$$s_{2n+1}^{(n)}-s_{2n+1}^{(n-1)}+s_{2n+1}^{(n-2)}-\ldots\pm 1=0,$$

qui résulte d'appliquer les formules (1.), (2.) et (3.) à la fonction $\sin x$, et la suivante:

$$S_{2n+1}^{(n)}-S_{2n+1}^{(n-1)}+S_{2n+1}^{(n-2)}-\ldots\pm 1=[1.3\ldots(2n-1)]^2(2n+1),$$

qui résulte d'appliquer les mêmes formules à la fonction $\cos x$ et de comparer le résultat au développement

$$\cos x=1-\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{1.2.2^2}\sin^4 x-\frac{1.3}{1.2.3.2^3}\sin^6 x-\ldots$$

XII

ALGUNS ARTIGOS SOBRE DIVERSAS QUESTÕES DE GEOMETRIA ANALYTICA

I.

ON THE RECTIFICATION OF BOOTH'S LOGARITHMIC ELLIPSE AND LOGARITHMIC HYPERBOLA.

(The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. XXXVI. London, 1904).

The geometrical representation of the elliptic integrals of the third kind caused Booth to consider two curves of double curvature which he named the *logarithmic ellipse* and the *logarithmic hyperbola* in his important work — *A Treatise on some new geometrical methods* (London, 1877, t. II, p. 51 and p. 76) — where it is shown that the rectification of those curves depends on elliptic integrals that are subsequently reduced to Legendre's fundamental forms of the first, second, and third kinds.

In order to obtain this reduction the eminent mathematician, Booth, employs a special analysis for each of these two curves, but nevertheless there exists between their equations the same simple relation that exists between the equations of the ellipse and the hyperbola.

The natural and simple method employed in the case of the logarithmic ellipse is not easily employed in the case of the logarithmic hyperbola, as the author says, therefore another method is used, but this one is not so simple and rather artificial.

Now in this paper I propose to undertake the above mentioned reduction by means of an analysis applicable to both curves, and which in the two cases is not less natural or less simple than Booth's analysis.

I.

On the logarithmic ellipse.

The logarithmic ellipse is the intersection of the paraboloid of revolution and the elliptic cylinder with the same axis; the equations are therefore

$$2kz = x^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*

The element of the arc is given by the formula

$$ds^2 = \frac{\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)^2 y^4 - \frac{a^2-b^2}{b^2}(k^2+a^2-b^2)\,y^2 - b^2k^2}{k^2(y^2-b^2)}\,dy^2.$$

Assuming now

$$\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right) y^4 - \frac{a^2-b^2}{b^2}(k^2+a^2-b^2)\,y^2 - b^2k^2 = (A+By^2)(C+By^2) = AC + B(A+C)\,y^2 + B^2y^4,$$

where A, B, C are given by the equations

$$B = \frac{b^2-a^2}{b^2}, \quad A+C = k^2+a^2-b^2, \quad AC = -b^2k^2,$$

we infer that A and C are the roots of the equation

$$(1) \qquad X^2 - (k^2+a^2-b^2)\,X - b^2k^2 = 0,$$

and the above formula may be written

$$ds^2 = \frac{(A+By^2)(C+By^2)}{k^2(y^2-b^2)}\,dy^2.$$

Now if we put

$$A + By^2 = (C+By^2)\,\frac{A}{C}\,t^2,$$

we obtain

$$(2) \qquad ds = \frac{(C-A)^2 A}{k\sqrt{C^3}\sqrt{(A+Bb^2)}} \cdot \frac{t^2\,dt}{(1-ht^2)^2\sqrt{\{(1-t^2)(1-j^2t^2)\}}},$$

where

$$h = \frac{A}{C}, \quad j^2 = \frac{A}{C}\cdot\frac{C+Bb^2}{A+Bb^2} = \frac{A}{C}\cdot\frac{C-(a^2-b^2)}{A-(a^2-b^2)}.$$

In this formula j^2 is positive and therefore j real; this may be proved by observing that A and C have different signs as well as $C-(a^2-b^2)$ and $A-(a^2-b^2)$, these four quantities being the roots of equations (1), and

$$X_1^2 - (k^2+b^2-a^2)\,X_1 - a^2k^2 = 0,$$

the latter resulting from the substitution of $X_1 + a^2 - b^2$ for X in (1).

We may further prove that $j^2 < 1$.

Assuming A to represent the negative root of (1), the above inequality is equivalent to

$$\frac{|\mathrm{A}|}{\mathrm{C}}\cdot\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}<1,$$

which is satisfied by the values of A and C, since $|\mathrm{A}| < \mathrm{C}$.

Substituting now in equation (2) for $\frac{t^2}{(1-ht^2)^2}$ the value

$$\frac{t^2}{(1-ht^2)^2}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(1-ht^2)^2}-\frac{1}{1-ht^2}\right\},$$

we obtain

$$ds=\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})^2\,\mathrm{A}}{k\sqrt{\mathrm{C}^3\sqrt{(\mathrm{A}-\mathrm{B}b^2)}}}\left\{-\frac{dt}{(1-ht^2)\sqrt{\{(1-t^2)(1-j^2t^2)\}}}+\frac{dt}{(1-ht^2)^2\sqrt{\{(1-t^2)(1-j^2t^2)\}}}\right\},$$

and putting

$$t=\sin\varphi,\quad \mathrm{K}=\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})^2\,\mathrm{A}}{k\sqrt{\mathrm{C}^3\sqrt{(\mathrm{A}-\mathrm{B}b^2)}}},\quad \Delta\varphi=\sqrt{(1-j^2\sin^2\varphi)},$$

we find

$$s=\mathrm{K}\left\{-\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}+\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)^2\,\Delta\varphi}\right\}.$$

Using the following results (easily obtained from well known formulæ for the reduction of elliptic integrals)

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)^2\Delta\varphi}=\frac{h^2}{2(1-h)(h-j^2)}\left[-\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-h\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{j^2}{h^2}\int_0^\varphi(1-h\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{3j^2-2hj^2-2h+h^2}{h^2}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\Delta\varphi}\right],$$

$$\int_0^\varphi(1-h\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\left(1-\frac{h}{j^2}\right)\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{h}{j^2}\int_0^\varphi\Delta\varphi\,d\varphi,$$

which give

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)^2\Delta\varphi}=\frac{h^2}{2(1-h)(h-j^2)}\left[-\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-h\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{j^2-h}{h^2}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{1}{h}\int_0^\varphi\Delta\varphi\,d\varphi+\frac{3j^2-2hj^2-2h+h^2}{h^2}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\Delta\varphi}\right].$$

we find

$$s = \frac{K}{2(1-h)(h-j^2)} \left[-\frac{h^2 \sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi}{1 - h \sin^2\varphi} \right.$$
$$\left. + h\int \Delta\varphi \, d\varphi + (j^2 - h)\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + (h^2 - j^2)\int \frac{d\varphi}{(1 - h\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \right].$$

By this formula we obtain s, and it follows that this quantity depends on elliptic integrals of the first, second, and third kinds.

II.

On the logarithmic hyperbola.

We proceed now to consider the logarithmic hyporbola, which is the intersection of the paraboloid of revolution and the hyperbolic cylinder with the same axis.

The equations of the curve are

$$2kz = x^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Comparing these equations with the equations of the logarithmic ellipse it will be seen that we can transform the expression of ds given by formula (2) to the expression of ds in the case of this latter curve by substituting, for b^2, $-b^2$, and we get

$$s = \frac{K}{2(1-h)(h-j^2)} \left[-\frac{h^2 \sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi}{1 - h \sin^2\varphi} \right.$$
$$\left. + h\int \Delta\varphi \, d\varphi + (j^2 - h)\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + (h^2 - j^2)\int \frac{d\varphi}{(1 - h\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \right],$$

where

$$B = \frac{a^2 + b^2}{b^2}, \quad A + C = k^2 + a^2 + b^2, \quad AC = b^2k^2,$$

$$h = \frac{A}{C}, \quad j^2 = \frac{A}{C} \cdot \frac{C - Bb^2}{A - Bb^2} = \frac{A}{C} \cdot \frac{C - (a^2 + b^2)}{A - (a^2 + b^2)}, \quad K = \frac{(C-A)^2 A}{k\sqrt{C^3}\sqrt{(A - Bb^2)}}.$$

A and C are now the roots of

$$X^2 - (k^2 + a^2 + b^2)X + b^2k^2 = 0.$$

As in the preceding case it will be similarly found that A and C have the same signs, and $A-(a^2+b^2)$ and $C-(a^2+b^2)$ have different signs; therefore j^2 is negative and j imaginary. Let $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$, we have then

$$s = \frac{K}{2(1-h)(h-j^2)} \Big| -\frac{h^2 \sin\psi \cos\psi \, \Delta\psi}{1-h\cos^2\psi}$$

$$-h\int_0^\psi \Delta\psi \, d\psi + (j^2-h)\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} - (h^2-j^2)\int_0^\psi \frac{d\psi}{(1-h\cos^2\psi)\,\Delta\psi} \Big| .$$

where

$$\Delta\psi = \sqrt{(1-j^2\cos^2\psi)} .$$

If now

$$\Delta\psi = \sqrt{(1-j^2)}\sqrt{(1-j_1^2\sin^2\psi)}, \quad 1-h\cos^2\psi = (1-h)(1-h_1\sin^2\psi),$$

where

$$j_1^2 = \frac{j^2}{j^2-1} = \frac{A(C-a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(C-A)}, \quad h_1 = \frac{h}{h-1},$$

we obtain

$$s = \frac{K}{2(1-h)(h-j^2)} \Big[-\frac{h^2 \sin\psi \cos\psi \, \Delta\psi}{1-h\cos^2\psi} - \sqrt{(1-j^2)}\, h\int_0^\psi \Delta_1\psi \, d\psi$$

$$-\frac{j^2-h}{\sqrt{(1-j^2)}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta_1\psi} - \frac{h^2-j^2}{(1-h)\sqrt{(1-j^2)}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{(1-h_1\sin^2\psi)\,\Delta_1\psi} \Big],$$

where

$$\Delta_1\psi = \sqrt{(1-j_1^2\sin^2\psi)}.$$

The above expression of j_1^2 proves that j_1 is real and that $j_1^2 < 1$.

II.

SOBRE UNA PROPRIEDAD DE LAS CÚBICAS CIRCULARES.

(Revista trimestral de Matemáticas, t. IV. Zaragoza, 1904).

Es bien conocido el siguiente teorema, relativo á las cúbicas circulares:

Si una circunferencia corta á una cúbica circular en cuatro puntos A, B, C *y* D, *cada una de las rectas* AB *y* CD *corta á la curva en un tercer punto,* E *y* F, *tales que la recta* EF *es paralela á su asíntota real.*

Las rectas AC *y* BD *gozan de la misma propriedad, así como las rectas* AD *y* BC.

En una excelente obra de Basset ([1]) se halla una demostración de este importante teorema, por medio de las coordenadas trilineales. Á esta demostración puede darse una forma más elemental, recurriendo á las coordenadas cartesianas oblícuas, conforme se verá.

Sean

$$(x^2 + y^2)(px + qy) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F}, \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \mathrm{R}^2$$

las ecuaciones de la cúbica y de la circunferencia consideradas.

Añadiendo á los dos miembros de la ecuación de la cúbica la expresión

$$(x_1^2 + y_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - \mathrm{R}^2)(px + qy),$$

puede reducirse esta ecuación á la forma

$$[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \mathrm{R}^2](px + qy) = \mathrm{A}_1x^2 + \mathrm{B}_1xy + \mathrm{C}_1y^2 + \mathrm{D}_1x + \mathrm{E}_1y + \mathrm{F},$$

mediante la cual se ve que los puntos de intersección de la cúbica con la circunferencia dada coinciden con los puntos de intersección de la misma circunferencia con la cónica cuya ecuación es

$$\mathrm{A}_1x^2 + \mathrm{B}_1xy + \mathrm{C}_1y^2 + \mathrm{D}_1x + \mathrm{E}_1y + \mathrm{F} = 0.$$

([1]) Basset — *An elementary Treatise on cubic and quartic curves.* Cambridge, 1901.

Tomando ahora para nuevos ejes de coordenadas las rectas AC y AB, poniendo $AC=a$ y $AB=b$, y observando que las equaciones de la cúbica, de la cónica y de la circunferencia, referidas al nuevo sistema de coordenadas, deben dar $x=0$ y $x=a$, cuando se haga $y=0$, y que deben dar $y=0$ é $y=b$, cuando se haga $x=0$; se ve que estas últimas ecuaciones deben tener la forma

$$A_2x(x-a)+B_2xy+C_2y(y-b)=0, \tag{1}$$

$$x(x-a)+Kxy+y(y-b)=0; \tag{2}$$

y que, por consiguiente, la ecuación de la cúbica, referida también á los nuevos ejes, debe ser

$$[x(x-a)+Kxy+y(y-b)](p_1x+q_1y+r_1)=A_2x(x-a)+B_2xy+C_2y(y-b). \tag{3}$$

Esto sentado, eliminando $y(y-b)$ entre las ecuaciones (1) y (2), se obtiene la ecuación $x=0$, que representa la recta AB, y la ecuación

$$(A_2-C_2)(x-a)+(B_2-KC_2)y=0, \tag{4}$$

que debe representar la recta CD; y, substituyendo en la ecuación (3) B_2y por su valor dado por la (4), se obtiene la ecuación (2), que representa una circunferencia ya considerada, que pasa por los puntos D y C, en que la recta DC corta á la cúbica, y la ecuación

$$p_1x+q_1y+r_1=C_2,$$

que representa una recta que debe pasar por el tercero de los puntos en que la DC corta á la cúbica, al cual representaremos por la letra F.

Poniendo ahora $x=0$, en esta última ecuación y en la ecuación (3), se ve que la recta representada por ella, pasa también por el punto E, en que la recta AB corta á la cúbica representada por la ecuación (3); y, como su coeficiente angular es igual al coeficiente angular de la asíntota de la cúbica, conclúyese que EF es paralela á esta asíntota. Y el theorema queda así demostrado.

III.

NOTA SULL'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI FAGNANO AGLI ARCHI DELLA LUMACA DI PASCAL E DELLA SINUSSOIDE.

(Periodico di Matematica, t. XIX. Livorno, 1904).

Quando lo sviluppo dell'arco di una curva sia esprimibile mediante un integrale ellitico di seconda specie, alle proprietà degli archi di ellisse corrispondono evidentemente proprietà degli archi della curva considerata. Vogliamo vedere in quanto segue quali sono le proprietà che corrispondono al *teorema di Fagnano* nel caso della *lumaca di Pascal* e della *sinussoide.*

1. È noto che l'equazione della *lumaca di Pascal,* in coordinate polari, è

$$\rho = a \cos \theta \pm h$$

e che lo sviluppo dei suoi archi è dato dalla formola

$$s = (a + h) \int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4ah}{(a+h)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta} \, . \, d\theta,$$

quando $h \gtrless a$, o, ponendo $\theta = 2\varphi$,

$$s = 2(a + h) \int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{4ah}{(a+h)^2} \operatorname{sen}^2 \varphi} \, . \, d\varphi$$

ossia

$$s = 2(a + h) \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, . \, d\varphi = 2(a + h) \operatorname{E}(k, \varphi),$$

per cui

$$k = \frac{4ah}{(a+h)^2} .$$

Ciò posto, applichiamo alla curva considerata la formola

$$\mathrm{E}(k,\varphi_1)+\mathrm{E}(k,\varphi_2)-\mathrm{E}\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}},$$

che si verifica quando φ_1 e φ_2 soddisfano alla relazione

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}},$$

ed alle diseguaglianze

$$0<\varphi_1<\frac{\pi}{2},\quad 0<\varphi_2<\frac{\pi}{2}.$$

Rappresentando con V l'angolo fatto dalla tangente nel punto corrispondente a φ col vettore di questo punto, notando che

$$\operatorname{tang}\mathrm{V}=\rho\frac{d\theta}{d\rho}=-\frac{a\cos\theta+h}{a\operatorname{sen}\theta},$$

e facendo

$$\cos\mathrm{V}=\frac{a\operatorname{sen}\theta}{(a+h)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}}=\frac{2a\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{(a+h)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

possiamo scrivere,

$$\mathrm{E}(k,\varphi_1)+\mathrm{E}(k,\varphi_2)-\mathrm{E}\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{k^2(a+h)}{2a}\cos\mathrm{V}.$$

Ma, d'altro lato, se A e B sono i punti della curva pei quali φ assume i valori 0 e $\frac{\pi}{2}$, e se M, M' sono punti pei quali φ piglia i valori φ_1, φ_2, abbiamo

$$\mathit{arco}\,\mathrm{AM}=2(a+h)\mathrm{E}(k,\varphi_1),\quad \mathit{arco}\,\mathrm{AM}'=2(a+h)\mathrm{E}(k,\varphi_2),$$

$$\mathit{arco}\,\mathrm{AB}=2(a+h)\mathrm{E}\left(k,\frac{\pi}{2}\right).$$

Quindi,

$$\mathit{arco}\,\mathrm{AM}-\mathit{arco}\,\mathrm{BM}'=\frac{k^2(a+h)^2}{a}\cos\mathrm{V}_1=4h\cos\mathrm{V}_1,$$

ponendo,

$$\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2=\frac{a+h}{a-h}.$$

Si può poi construire la differenza degli archi AM e BM′ della lumaca di Pascal pigliando sul vettore del punto M un segmento eguale a $4h$ e proiettando sulla tangente alla curva in questo punto.

2. Consideriamo ora la *sinussoide*, la cui equazione è

$$y = a \operatorname{sen} \frac{x}{m} \cdot$$

Abbiamo,

$$s = \int_0^y \sqrt{\frac{a^2 + m^2 - y^2}{a^2 - y^2}} \cdot dy,$$

o, facendo

$$y = a \operatorname{sen} \varphi, \quad k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + m^2}},$$

$$s = \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, . d\varphi .$$

Applichiamo anche adesso all'integrale che entra in questa formola la relazione

$$\mathrm{E}(k, \varphi_1) + \mathrm{E}(h, \varphi_2) - \left(h, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}},$$

che ha luogo facendo

$$\operatorname{tang} \varphi_1 \operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2},$$

e notiamo che è

$$\frac{k^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{y \sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 + m^2} \sqrt{a^2 + m^2 - y^2}}, \quad \mathrm{T} = y \sqrt{\frac{m^2 + a^2 - y^2}{a^2 - y^2}},$$

rappresentando con T la lunghezza della tangente alla curva nel punto (x, y).

Si ottiene così l'eguaglianza,

$$\mathrm{E}(k, \varphi_1) + \mathrm{E}(k, \varphi_2) - \mathrm{E}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{y_1^2}{\mathrm{T}_1 \sqrt{a^2 + m^2}},$$

ove y_1 rappresenta l'ordinata del punto della curva corrispondente a $\varphi = \varphi_1$ e T_1 la lunghezza della tangente alla curva nello stesso punto.

Ma d'altra parte, se O rappresenta il punto della curva che coincide coll'origine delle coordinate, A il punto che corrisponde a $x = \frac{1}{2} m\pi$, M e M′ i punti che corrispondono a

$\varphi = \varphi_1$ e $\varphi = \varphi_2$, S ed N i punti nei quali la tangente e la normale alla curva in M incontrano l'asse delle ascisse, Q la proiezione di M su quest'asse ed L il punto in cui la perpendicolare ad MN condotta per Q incontra questa retta, abbiamo

$$arco\,\mathrm{OM} = \sqrt{a^2 + m^2}\,\mathrm{E}(k, \varphi_1), \quad arco\,\mathrm{OM}' = \sqrt{a^2 + m^2}\,\mathrm{E}(k, \varphi_2),$$

$$arco\,\mathrm{OA} = \sqrt{a^2 + m^2}\,\mathrm{E}\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y_1 = \mathrm{MQ} = \mathrm{T}_1 \operatorname{sen} \mathrm{MSO}, \quad \mathrm{QL} = y_1 \operatorname{sen} \mathrm{MSO};$$

dunque

$$arco\ \mathrm{OM} - arco\ \mathrm{AM}' = \mathrm{QL},$$

quando

$$\operatorname{tang} \varphi_1 \operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{\sqrt{a^2 + m^2}}{m}.$$

IV.

SUR LE NOMBRE DES TANGENTES QU'ON PEUT MENER A UNE COURBE PAR UN POINT SITUÉ SUR LA COURBE.

(L'Enseignement mathématique, t. VII. Paris, 1905).

1. Le problème qui a pour but la détermination du nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe algébrique par un point situé sur la courbe se résout d'une manière presque intuitive quand on considère seulement les tangentes réelles, comme on peut voir dans l'ouvrage de Basset, *An elementary Treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901, p. 17). Mais, quand on veut étudier cette question d'une manière générale, en considérant les tangentes réelles et imaginaires, sa résolution est moins facile. C'est à ce point de vue général que s'est placé Salmon dans son ouvrage sur les *courbes planes* (édit. française, Paris, 1884, p. 89), où il a donné à cet égard un théorème important, qu'il a obtenu par une élégante méthode algébrique.

Or, nous allons nous occuper de cette question, en nous plaçant aussi au point de vue algébrique général, pour donner une démonstration, que nous croyons nouvelle, conduisant par une méthode plus élémentaire au résultat obtenu par l'éminent géomètre anglais.

2. Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe considérée et m son degré.

L'équation de sa première polaire, par rapport au point (x_1, y_1), est, comme on le sait, la suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_1) = 0,$$

et son degré est égal à $m - 1$.

Cela posé, nous allons démontrer le lemme suivant:

Si (x_1, y_1) est un point multiple d'ordre k de la courbe considérée, il est aussi un point mul-

tiple de même ordre de sa polaire, et les k branches de la courbe qui se coupent en ce point, sont tangentes aux k branches de la polaire qui s'y coupent aussi.

On peut considérer comme compris dans cet énoncé le cas où (x_1, y_1) est un point simple de la courbe, en supposant alors $k=1$.

Pour démontrer le lemme précédent, écrivons l'équation de la courbe de la manière suivante:

$$f(x_1+x-x_1,\quad y_1+y-y_1)=0,$$

et ensuite développons son premier membre suivant les puissances de $x-x_1$ et $y-y_1$; ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x-x_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial y_1}(x-x_1)(y-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y-y_1)^2\right]+\ldots=0,$$

ou, *symboliquement,*

$$\sum_{n=1}^{n=m}\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)\right]^{(n)}=0.$$

L'équation de la polaire de cette courbe peut être écrite de la manière suivante, en ordonnant aussi son premier membre suivant les puissances de $x-x_1$ et $y-y_1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)$$

$$+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x-x_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial y_1}(x-x_1)(y-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y-y_1)^2\right]+\ldots=0,$$

ou, *symboliquement,*

$$\sum_{n=1}^{n=m}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)\right]^{(n)}=0.$$

Ces équations montrent, en premier lieu, que si (x_1, y_1) est un point simple de la courbe considérée, la droite dont l'équation est

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)=0$$

est tangente à cette courbe et à sa polaire.

On voit ensuite que, si (x_1, y_1) est un point double de la courbe considérée et si, par con-

séquent, ses coordonnées x_1 et y_1 satisfont aux équations $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, les deux droites représentées par l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x-x_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial y_1}(x-x_1)(y-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y-y_1)^2=0$$

sont tangentes au point (x_1, y_1) à la courbe et à sa polaire.

En continuant de la même manière, on démontre le lemme énoncé précédemment.

3. En nous basant sur le lemme ci-dessus, nous allons déterminer le nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe donnée par le point (x_1, y_1).

Supposons d'abord que la courbe a seulement un point multiple, qui coïncide avec (x_1, y_1), et que l'ordre de ce point est égal à k.

La courbe donnée et sa polaire se coupent alors en $m(m-1)$ points, et l'un de ces points coïncide avec (x_1, y_1). Or, ce point étant multiple d'ordre k sur la courbe et sur la polaire, il compte pour k^2 intersections. Mais, comme les k branches de la courbe sont tangentes aux k branches de la polaire, chaque branche de celle-là a encore un autre point, consécutif à (x_1, y_1), en commum avec la polaire. Donc le nombre des intersections de la courbe et de sa polaire, distinctes de (x_1, y_1), est égal à

$$m(m-1)-k(k+1).$$

Or, ces points coïncident avec les points de contact des tangentes à la courbe menées par (x_1, y_1); et on a, par conséquent, en représentant le nombre de ces tangentes par t,

$$t=m(m-1)-k(k+1),$$

résultat qui coïncide avec celui qui a été obtenu par Salmon.

Si (x_1, y_1) est un point simple, cette formule a encore lieu, en supposant alors $k=1$.

Si la courbe donnée a δ points doubles et ν points de rebroussement, distincts de (x_1, y_1), la valeur de t peut être encore obtenue facilement, en employant la méthode dont on fait usage habituellement pour démontrer celle des formules de Plücker qui détermine la classe de la courbe (Salmon, *l. c.*, p. 77–78) et le lemme précédemment démontré. On trouve ainsi

$$t=m(m-1)-2\delta-3\nu-k(k+1).$$

V.

SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

(Mathesis, t. XXVI. Gand, 1906).

On sait que si les coordonnées (x, y) et (X, Y) des points de deux courbes U et U′ sont liées par les équations

$$x = \frac{aX + bY + c}{X + pY + q}, \quad y = \frac{a'X + b'Y + c'}{X + pY + q}, \tag{1}$$

l'une de ces courbes est une perspective de l'autre.

Voici une démonstration bien simple et élémentaire de ce théorème; elle est peut-être nouvelle.

Je remarque premièrement que les égalités (1) peuvent être écrites ainsi,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \beta \left[\frac{X \cos \alpha - Y \sin \alpha + h}{X + pY + q} + x_0 \right], \\ y &= \beta \left[\frac{X \sin \alpha + Y \cos \alpha + k}{X + pY + q} + y_0 \right]. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

En effet, l'identité des formules (1) et (2) exige:

$$\beta(\cos \alpha + x_0) = a, \quad \beta(px_0 - \sin \alpha) = b; \tag{3}$$

$$\beta(\sin \alpha + y_0) = a', \quad \beta(py_0 + \cos \alpha) = b'; \tag{4}$$

$$\beta(qx_0 + h) = c, \quad \beta(qy_0 + k) = c'. \tag{5}$$

Or, en éléminant x_0 entre les égalités (3), y_0 entre les égalités (4), on obtient

$$ap - b = \beta(p \cos \alpha + \sin \alpha), \quad a'p - b' = \beta(p \sin \alpha - \cos \alpha), \tag{6}$$

relations d'où on tire facilement β et $\operatorname{tang} \alpha$ en faisant la somme de leurs carrés et en les divisant l'une par l'autre. Les inconnues x_0, y_0 résultent ensuite de l'une des équations (3) et (4). Enfin, les équations (5) font connaître h et k.

Cela posé, les axes coordonnés primitifs étant supposés rectangulaires, je change les axes auxquels est rapportée la courbe U′ en posant

$$(7) \qquad h + \mathrm{X} \cos \alpha - \mathrm{Y} \sin \alpha = \mathrm{X}_1, \quad k + \mathrm{X} \sin \alpha + \mathrm{Y} \cos \alpha = \mathrm{Y}_1,$$

et j'aurai

$$(8) \qquad x = \frac{\mathrm{X}_1}{a_1 \mathrm{X}_1 + b_1 \mathrm{Y}_1 + c_1} + x_0', \quad y = \frac{\mathrm{Y}_1}{a_1 \mathrm{X}_1 + b_1 \mathrm{Y}_1 + c_1} + y_0'.$$

Posons encore

$$a_1 = \lambda \cos \alpha_1, \quad b_1 = \lambda \sin \alpha_1, \quad c_1 = \lambda e,$$

λ, α_1, e seront des quantités bien déterminées. Si nous faisons maintenant

$$\mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_1 \cos \alpha_1 + \mathrm{Y}_1 \sin \alpha_1 + e, \quad \mathrm{Y}_2 = \mathrm{Y}_1 \cos \alpha_1 - \mathrm{X}_1 \sin \alpha_1,$$

ce qui correspond à un second changement d'axes pour U′, les formules (8) deviennent

$$(9) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{(\mathrm{X}_2 - e) \cos \alpha_1 - \mathrm{Y}_2 \sin \alpha_1}{\lambda \mathrm{X}_2} + x_0', \\[2ex] y = \dfrac{(\mathrm{X}_2 - e) \sin \alpha_1 + \mathrm{Y}_2 \cos \alpha}{\lambda \mathrm{X}_2} + y_0'. \end{cases}$$

Changeons maintenant les axes auxquels est rapportée la courbe U en posant

$$x = x_0' + \frac{\cos \alpha_1}{\lambda} - x_2 \cos \alpha_1 - y_2 \sin \alpha_1,$$

$$y = y_0' + \frac{\sin \alpha_1}{\lambda} - x_2 \sin \alpha_1 + y_2 \cos \alpha_1 ;$$

il vient

$$(10) \qquad x_2 = \frac{e}{\lambda \mathrm{X}_2}, \quad y_2 = \frac{\mathrm{Y}_2}{\lambda \mathrm{X}_2}.$$

Pour achever la démonstration, considérons trois axes rectangulaires OX_2, OY_2, OZ_2, un point $\mathrm{P}(0, 0, \gamma)$ sur l'axe OZ_2 et un plan $\pi (\mathrm{X}_2 = \delta)$ perpendiculaire à l'axe OY_2. Prenons un point quelconque $\mathrm{A}(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, 0)$ du plan $\mathrm{X}_2 \mathrm{Y}_2$ et projetons A en B sur le plan π, à partir

du point P. Les équations de la droite joignant les points A, P étant

$$\frac{x}{X_2} = \frac{y}{Y_2} = \frac{z - \gamma}{-\gamma},$$

on trouve pour les coordonnées de B :

$$(11) \qquad y = \frac{\delta Y_2}{X_2}, \quad z = \gamma - \frac{\gamma\delta}{X_2}.$$

Rapportons le point B à deux axes du plan π, dont l'un $O'x_2$ est la trace de π sur le plan X_2Z_2 et dont l'autre $O'y_2$ est la trace de π sur le plan $z = \gamma$; les formules (11) prendront la forme

$$(11) \qquad y_2 = \frac{\delta Y_2}{X_2}, \quad x_2 = -\frac{\gamma\delta}{X_2}.$$

La comparaison des formules (10) et (11) établit la proposition que nous avions en vue.

VI.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES.

Extrait d'une lettre adressée à P. H. Schoute.

(Nieuw Archief voor Wiskunde, tweede reeks, VII. Amsterdam. 1906).

Nous allons donner dans cette Note quelques théorèmes relatifs aux cubiques qui n'ont pas encore été remarqués peut-être.

1. Considérons une cubique quelconque représentée par l'équation

$$Ax_1^3 + Bx_1^2y_1 + Cx_1y_1^2 + Dy_1^3 + Ex_1^2z_1 + Fx_1y_1z_1 + Gy_1^2z_1 + Hx_1z_1^2 + Ky_1z_1^2 + Lz_1^3 = 0,$$

et la polaire du point ($x_1 = 0$, $z_1 = 0$)

$$Bx_1^2 + 2Cx_1y_1 + 3Dy_1^2 + Fx_1z_1 + 2Gy_1z_1 + Kz_1^2 = 0.$$

On voit au moyen de ces équations que, si l'on prend pour côté des z_1 du triangle de reférence la tangente à cette cubique à un point A, pour côté des x_1 un droite qui passe par A et par deux points quelconques A_1 et A_2 de la même cubique, et pour côté des y_1 la tangente à la polaire de A au point où cette conique, dont l'équation a été écrite ci-dessus, coupe la droite A_1A_2, on a $D = 0$, $C = 0$, $F = 0$ et $K = 0$, et que par suite l'équation de la cubique considérée prend la forme

$$z_1(Gy_1^2 + Lz_1^2) + Ax_1^3 + Bx_1^2y_1 + Ex_1^2z_1 + Hx_1z_1^2 = 0.$$

Remarquons maintenant que cette équation fait voir que, si $G = 0$, le point A, où $x_1 = 0$ et $z_1 = 0$, est double, et que, si $L = 0$, les points A_1 et A_2, où la droite coupe la cubique,

coïncident. Donc, si la droite AA_1A_2 coupe la cubique donnée en trois points distincts, on peut poser

$$x = \frac{y_1}{x_1}, \quad y = \frac{z_1}{x_1}\sqrt{\frac{L}{G}},$$

ce qui donne une équation de la forme

$$y(x^2 + y^2) + H_1 y^2 + E_1 y + B_1 x + A_1 = 0,$$

laquelle représente une *cubique circulaire* qui est donc une *perspective* de la cubique donnée.

Voici maintenant quelques conséquences de ce résultat.

En remarquant que aux points A_1 et A_2 de la cubique donnée correspondent les points circulaires de l'infini de la cubique circulaire et en se fondant sur les propriétés de cette cubique et sur les propriétés de la transformation homographique, on peut énoncer les théorèmes suivants:

Une cubique générale quelconque peut être considérée de quatre manières différentes comme l'enveloppe d'une série de coniques bitangentes qui passent par deux points fixes A_1 et A_2 de la même cubique.

Si la cubique est rationnelle, le nombre des séries de coniques bitangentes dont elle est l'enveloppe se réduit à deux si elle a un noeud, à un si elle a un point de rebroussement. Dans ce cas elle est, en outre, l'enveloppe d'une série de coniques simplement tangentes, qui passent par le point double.

Les tangentes à une cubique générale passant aux points A_1 et A_2 déterminent par leurs intersections 16 points, situés sur quatre coniques, qui passent par A_1 et A_2, et chaque conique en contient 4.

2. On sait que toute cubique circulaire qui passe par son *foyer singulier* est le lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe B aux cercles, réels ou imaginaires, qui passent par deux points donnés B_1 et B_2, que B coïncide avec ce foyer, et que la cubique passe par B_1 et B_2. Nous ajouterons que la polaire de B par rapport à la cubique est un des cercles considérés. En effet, si l'on prend le point B pour origine des coordonées, une droite parallèle à B_1B_2 pour axe des ordonnées et une perpendiculaire à cette droite pour axe des abscisses, et si l'on représente par (α, β) les coordonnées du milieu de la corde B_1B_2 et par c sa longueur, l'équation de la cubique considérée est la suivante:

$$x(x^2 + y^2) - 2\alpha(x^2 + y^2) + (\alpha^2 - \beta^2 + c^2)x + 2\alpha\beta y = 0,$$

et l'équation de la polaire du point (0, 0) est donc

$$\alpha(x^2 + y^2) - (\alpha^2 - \beta^2 + c^2)x - 2\alpha\beta y = 0;$$

or cette équation représente un cercle qui passe par les points $(\alpha, \beta \pm c)$.

3. Cela posé, nous allons donner un théorème générale sur les cubiques qu'on obtient au moyen des propriétés des cubiques circulaires qu'on vient de rappeler et de la théorie donnée au n.° 1.

Considérons pour cela, comme au n.° 1, un cubique quelconque donnée et trois points A, A_1, A_2 de cette courbe, situés sur une même droite, et supposons maintenant que les tangentes à cette cubique aux points A_1 et A_2 se coupent en un point U de la même courbe. Alors les asymptotes imaginaires de la cubique circulaire *correspondante* se coupent aussi à un point situé sur cette dernière courbe, qui en est donc le *foyer singulier,* et cette cubique appartient donc au groupe des cubiques circulaires qu'on vient de considérer. En remarquant maintenant que à ce foyer B correspond le point U de la cubique donnée et que aux points circulaires de l'infini et aux points B_1 et B_2 de la cubique circulaire correspondent les points A_1 et A_2 et les deux autres points où la polaire de U coupe la conique donnée, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Toute cubique est lieu des points de contact des tangentes menées par un quelconque de ses points U *aux coniques qui passent par les quatre points où la cubique est coupée par la polaire du point* U *considéré.*

XIII

DIVERSOS ARTIGOS SOBRE ANALYSE MATHEMATICA

I.

SUR UNE FORMULE POUR LE CALCUL NUMÉRIQUE DES LOGARITHMES.

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 4.e série, t. V. Paris, 1905).

Je me propose de donner ici une formule pour le calcul des valeurs des logarithmes des nombres, laquelle me paraît pouvoir être utile en quelques circonstances.

Je considère, pour cela, la fonction rationnelle

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n}$$

et je la décompose en fractions simples; ce qui donne

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \ldots + \frac{A_n}{t^n} + \frac{B_1}{t-a} + \frac{B_2}{(t-a)^2} + \frac{B_3}{(t-a)^3} + \ldots + \frac{B_n}{(t-a)^n}.$$

Pour déterminer A_1, A_2, ..., A_n, je développe le binome $(h-a)^{-n}$ en série ordonnée suivant les puissances de h, ce qui donne

$$(h-a)^{-n} = \frac{(-1)^n}{a^n}\left[1 + \binom{n}{1}\frac{h}{a} + \binom{n+1}{2}\frac{h^2}{a^2} + \binom{n+2}{3}\frac{h^3}{a^3} + \ldots + \binom{2n-2}{n-1}\frac{h^{n-1}}{a^{n-1}} + \ldots\right].$$

On a donc

$$A_1 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}, \quad A_2 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}, \quad A_3 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3},$$

....

$$A_{n-2} = \frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2}, \quad A_{n-1} = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n}{1}, \quad A_n = \frac{(-1)^n}{a^n}.$$

Pour déterminer B_1, B_2, B_3, ..., B_n, on doit poser $t = a + h$ dans la fraction $\frac{1}{t^n}$, et développer le résultat suivant les puissances de h, ce qui donne

$$(a+h)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1 - \binom{n}{1}\frac{h}{a} + \binom{n+1}{2}\frac{h^2}{a^2} - \binom{n+2}{3}\frac{h^3}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{h^{n-1}}{a^{n-1}} + \ldots\right];$$

par conséquent

$$B_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}, \quad B_2 = \frac{(-1)^{n-2}}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}, \quad B_3 = \frac{(-1)^{n-3}}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$B_{n-2} = \frac{(-1)^2}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2}, \quad B_{n-1} = \frac{(-1)}{a^{n+1}}\binom{n}{1}, \quad B_n = \frac{1}{a^n}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^n(t-a)^n} &= \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-a}\right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t-a)^2}\right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3}\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t-a)^3}\right) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2}\left(\frac{1}{t^{n-2}} + (-1)^{n-2}\frac{1}{(t-a)^{n-2}}\right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n}{1}\left(\frac{1}{t^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{(t-a)^{n-1}}\right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^n}\left(\frac{1}{t^n} + (-1)^n\frac{1}{(t-a)^n}\right).
\end{aligned}$$

En intégrant maintenant les deux membres de cette identité et en prenant l'intégrale entre les limites x et ∞, on trouve, en supposant $x > a > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n} &= \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}\log\frac{x-a}{x} + \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a}\right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2}\frac{1}{n-3}\left(\frac{1}{x^{n-3}} + (-1)^{n-2}\frac{1}{(x-a)^{n-3}}\right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n}{1}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{x^{n-2}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-2}}\right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{a^n}\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + (-1)^n\frac{1}{(x-a)^{n-1}}\right),
\end{aligned}$$

Cette formule, que nous croyons nouvelle, sans en être certain, est celle que nous nous proposions de démontrer. Elle donne la valeur de la différence entre les logarithmes des nombres x et $x-a$ avec une erreur inférieure à

$$a^{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^n(x-a)^{n-1}},$$

et peut être principalement utile quand le nombre représenté par a est petit et le nombre représenté par x est grand

En posant $a=1$, on trouve la formule

$$\begin{aligned}\log x-\log(x-1)=\lim_{n=\infty}\Big[&\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{1}{n-2}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n-1)}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^{n-2}}\right)\\&+\frac{1}{n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n-1}}\right)\Big]\end{aligned}$$

qui donne la valeur de la différence des logarithmes des deux nombres consécutifs x et $x-1$ avec une erreur inférieure à

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^n(x-1)^{n-1}},$$

et qui a lieu quand $x\gtreqless 2$.

On déduit, comme corollaire de cette formule, que la différence des logarithmes des nombres x et $x-1$ peut être représentée approximativement par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2.10^3}$, quand $x>10$, à $\frac{1}{2.10^6}$, quand $x>100$, à $\frac{1}{2.10^9}$ quand $x>1000$, etc.

On voit, de la même manière, que la différence des logarithmes des nombres x et $x-1$ peut être représentée approximativement par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{12.10^5}$, quand $x>10$, à $\frac{1}{12.10^{10}}$, quand $x>100$, etc.

Parmi les formules qui résultent de la formule générale précédemment écrite, nous indiquerons encore la suivante

$$\log\frac{x+1}{x-1}=\lim_{n=\infty}\Bigg[2\,\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{2^2}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

$$+\frac{2^3}{3}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x-1)^3}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\frac{2^{n-2}}{n-2}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{(x+1)^{n-2}}-\frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^{n-2}}\right)$$

$$\mp\frac{2^{n-1}}{n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{(x+1)^{n-1}}-\frac{(-1)^{n}}{(x-1)^{n-1}}\right)\Bigg].$$

qu'on obtient en y remplaçant x par $x+1$ et en posant $a=x$.

Cette formule a lieu quand $x>3$ et donne $\log\frac{x+1}{x-1}$ avec une erreur inférieure à

$$2^{2n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x+1)^n(x-1)^{n-1}}\,.$$

II.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES

(Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, IX. Berlin, 1905).

1. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x - a - ib)\,dx,$$

où b représente une quantité différente de zéro, a une grande importance dans la théorie de l'intégration des fonctions circulaires, comme on peut le voir en lisant les belles pages que Hermite a consacrées à cette doctrine dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Dans cet important ouvrage l'éminent géomètre donne la formule

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x - a - ib)\,dx = 2(b)i\pi, \tag{1}$$

où (b) représente une quantité égale à l'unité [illegible] et du signe de b. Il obtient cette valeur au moyen [illegible]. Nous avons déjà donné une autre démonstration de ce résultat, en nous fondant sur un théorème de Cauchy, très connu, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. VII, p. 220).

Dans la présente Note nous allons d'abord [illegible] de cette formule, pour en donner une nouvelle démonstration, fondée sur l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = i\pi \sum_1^m A_n (b_n), \tag{2}$$

où $F(x)$ représente une fonction entière de degré m; $f(x)$ une autre de degré inférieure à $m - 1$; $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$, ..., $a_m + ib_m$ les racines de $F(x) = 0$, que nous supposons toutes inégales et imaginaires; A_1, A_2, ..., A_m les numérateurs des fractions simples dans lesquelles on peut décomposer $\frac{f(x)}{F(x)}$; et (b_n) une quantité égale à l'unité et du signe de b_n.

On démontre facilement cette égalité en généralisant l'analyse employée par Hermite (l. c., p. 289) pour l'établir dans le cas où $f(x) = 1$ et $F(x) = (x - a_1 - ib_1)(x - a_2 - ib_2)$.

On a, en effet,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{n=1}^{\nu} \frac{A_n}{x - a_n - ib_n}$$

et

$$\int \frac{dx}{x - a_n - ib_n} = \frac{1}{2} \log\left[(x - a_n)^2 + b_n^2\right] + i \operatorname{arctg} \frac{x - a_n}{b_n},$$

et par conséquent

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\nu} A_n \log \frac{(\beta - a_n)^2 + b_n^2}{(\alpha - a_n)^2 + b_n^2}$$

$$+ i \sum_{n=1}^{\nu} A_n \left[\operatorname{arctg} \frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha - a_n}{b_n}\right]$$

$$= \log \frac{\beta}{\alpha} \cdot \sum_{n=1}^{\nu} A_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\nu} A_n \log \frac{\left(1 - \frac{a_n}{\beta}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\beta^2}}{\left(1 - \frac{a_n}{\alpha}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\alpha^2}}$$

$$+ i \sum_{n=1}^{\nu} A_n \left[\operatorname{arctg} \frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha - a_n}{b_n}\right].$$

Mais, en vertu d'un théorème bien connu, on a

$$\sum_{1}^{\nu} A_n = 0.$$

Donc

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\nu} A_n \log \frac{\left(1 - \frac{a_n}{\beta}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\beta^2}}{\left(1 - \frac{a_n}{\alpha}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\alpha^2}} + i \sum_{1}^{\nu} A_n \left[\operatorname{arctg} \frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha - a_n}{b_n}\right].$$

En posant maintenant dans cette formule $\alpha = -x$, $\beta = x$, on trouve immédiatement la formule (2), qu'on voulait démontrer.

Cela posé, nous allons déduire de l'égalité qu'on vient d'établir, l'égalité (1).

Nous avons d'abord

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x - a - ib)\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cot \frac{1}{2}(a + ib) \cot \frac{1}{2} x + 1}{\cot \frac{1}{2}(a + ib) - \cot \frac{1}{2} x}\, dx,$$

et, par conséquent, en posant $\cot\frac{1}{2}x=t$,

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx=-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{\left[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)\right]\left[t^2+1\right]}\,dt.$$

Nous avons aussi

$$\frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{\left[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)\right]\left[t^2+1\right]}=\frac{A_1}{t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)}+\frac{A_2}{t-i}+\frac{A_3}{t+i},$$

où

$$A_1=1,\quad A_2=-\frac{1}{2},\quad A_3=-\frac{1}{2};$$

et

$$a_1+ib_1=\cot\frac{1}{2}(a+ib),\quad a_2+ib_2=i,\quad a_3+ib_3=-i.$$

En appliquant la formule (2) nous trouvons donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{\left[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)\right]\left[t^2+1\right]}\,dt=i\pi(b_1),$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx=-2i\pi(b_1).$$

Pour déterminer (b_1), remarquons qu'on a

$$a_1+ib_1=\cot\frac{1}{2}(a+ib)=\frac{2\sin a-i(e^b-e^{-b})}{\left(e^{-\frac{1}{2}b}+e^{\frac{1}{2}b}\right)^2\sin^2\frac{1}{2}a+\left(e^{-\frac{1}{2}b}-e^{\frac{1}{2}b}\right)^2\cos^2\frac{1}{2}a},$$

et par conséquent

$$b_1=\frac{e^{-b}-e^b}{\left(e^{-\frac{1}{2}b}+e^{\frac{1}{2}b}\right)^2\sin^2\frac{1}{2}a+\left(e^{-\frac{1}{2}b}-e^{\frac{1}{2}b}\right)^2\cos^2\frac{1}{2}a}.$$

On voit donc que b_1 est positif quand $b<0$ et négatif quand $b>0$, et qu'on peut, par conséquent, écrire $(b_1)=-(b)$, et ensuite

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx=2i\pi(b).$$

2. On peut trouver au moyen d'une analyse semblable la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \cot \frac{1}{2}(x - a - ib)\, dx.$$

Nous avons, en effet,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = \sum_{n=1}^{n=m} A_n \log \beta + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=m} \log \left[\left(1 - \frac{a_n}{\beta}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\beta^2} \right]$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=m} A_n \log\left[(\alpha - a_n)^2 + b_n^2\right]$$

$$+ i \sum_{n=1}^{n=m} A_n \left[\operatorname{arctg} \frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha - a_n}{b_n} \right],$$

et par conséquent, en ayant d'abord égard à l'identité $\sum\limits_{n=1}^{n=m} A_n = 0$ et en posant ensuite $\alpha = 0$ et $\beta = \infty$,

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=m} A_n \log(a_n^2 + b_n^2) + i \sum_{n=1}^{n=m} A_n \left[\frac{1}{2} \pi (b_n) + \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n} \right].$$

En appliquant maintenant cette formule à la fonction

$$\frac{t \cot \frac{1}{2}(a - ib) + 1}{\left[t - \cot \frac{1}{2}(a - ib)\right] \left[t^2 + 1\right]},$$

on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{t \cot \frac{1}{2}(a + ib) + 1}{\left[t - \cot \frac{1}{2}(a + ib)\right] \left[t^2 + 1\right]}\, dt = - \frac{1}{2} \log(a_1^2 + b_1^2) + i \left[\frac{1}{2} \pi (b_1) + \operatorname{arctg} \frac{a_1}{b_1} \right],$$

et par conséquent

$$\int_0^{\infty} \frac{t \cot \frac{1}{2}(a + ib) + 1}{\left[t - \cot \frac{1}{2}(a + ib)\right] \left[t^2 + 1\right]}\, dt = - \frac{1}{2} \log \frac{e^{2b} - 2 \cos 2a + e^{-2b}}{(e^{b} - 2 \cos a + e^{-b})^2}$$

$$+ i \left[\frac{1}{2} \pi (b) + \operatorname{arctg} \frac{2 e^{b} \sin a}{1 - e^{2b}} \right].$$

Mais on a

$$\int_0^{\pi} \cot \frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx = -2\int_0^{\infty} \frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{\left[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)\right][t^2+1]}\,dt.$$

Donc

$$\int_0^{\pi} \cot \frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx = \log\frac{e^{2b}-2\cos 2a+e^{-2b}}{(e^{b}-2\cos a+e^{-b})^2} + i\left[\pi(b)-2\operatorname{arctg}\frac{2\,e^{b}\sin a}{1-e^{2b}}\right].$$

III.

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE DEUX FORMULES POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI.

(L'Enseignement mathématique, t. VII. Paris, 1905).

1. Nous allons nous occuper, en premier lieu, de la formule bien connue

$$B_{2n-1}=(-1)^n\frac{2n}{2^{2n}-1}\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i-1}\frac{1}{2^{i+1}}\Big[i^{2n-1}-i(i-1)^{2n-1}+\binom{i}{2}(i-2)^{2n-1}$$

$$-\binom{i}{3}(i-3)^{2n-1}+\ldots\pm\binom{i}{i-1}1^{2n-1}\Big],$$

où B_{2n-1} représente les *nombres de Bernoulli.*

On trouve une démonstration de cette formule dans le *Calcul intégral de Serret* (2.^e^ édit., p. 225) et nous en avons donné une autre dans notre *Curso de Analyse* (Calculo differencial, 3.^a^ ed., p. 237). Mais nous allons l'obtenir ici par une analyse plus simple que celle que l'on trouve dans ces deux traités, au moyen de la formule connue (Hermite, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique,* p. 60):

$$y^{(n)}=n!\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{i!}f^{(i)}(u),$$

où

$$A_i=\frac{1}{n!}\Big[(u^i)^{(n)}-i(u^{i-1})^{(n)}u+\binom{i}{2}(u^{i-2})^{(n)}u^2-\ldots\Big],$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand $y=f(u)$ et u est une fonction donnée de x.

Pour cela, appliquons cette formule à la fonction

$$y=(1+e^x)^{-1}.$$

On a, en posant $y = u^{-1}$, $u = 1 + e^x$,

$$y^{(n)} = n!\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{A_i}{(1+e^x)^{i+1}},$$

où

$$A_i = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\binom{i}{k}\frac{d^n(1+e^x)^{i-k}}{dx^n}(1+e^x)^k.$$

Mais

$$(1+e^x)^{i-k} = 1 + (i-k)e^x + \binom{i-k}{2}e^{2x} + \ldots + e^{(i-k)x},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^n(1+e^x)^{i-k}}{dx^n} = (i-k)e^x + \binom{i-k}{2}2^n e^{2x} + \binom{i-k}{3}3^n e^{3x} + \ldots + (i-k)^n e^{(i-k)x},$$

et, en posant $x = 0$,

$$\left[\frac{d^n(1+e^x)^{i-k}}{dx^n}\right]_{x=0} = (i-k) + \binom{i-k}{2}2^n + \binom{i-k}{3}3^n + \ldots + (i-k)^n.$$

Donc on a

$$y_0^{(n)} = n!\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{A_i}{2^{i+1}},$$

où

$$A_i = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\binom{i}{k}2^k\sum_{t=0}^{i-k}\binom{i-k}{t}t^n = \frac{1}{n!}\sum_{t=0}^{i-1}t^n\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{k}\binom{i-k}{t}2^k.$$

Mais, puisque

$$\binom{i}{k}\binom{i-k}{t} = \binom{i}{t}\binom{i-t}{k},$$

nous pouvons écrire l'identité

$$\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{k}\binom{i-k}{t}2^k = \sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{t}\binom{i-t}{k}2^k$$

$$= \binom{i}{t}\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i-t}{k}2^k = \binom{i}{t}(1-2)^{i-t} = (-1)^{i-t}\binom{i}{t}.$$

Nous avons donc

$$A_i = \frac{1}{n!} \sum_{t=1}^{i-1} (-1)^{i-t} \binom{i}{t} t^n,$$

et

$$y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left| i^n - i(i-1)^n + \binom{i}{2}(i-2)^n - \ldots \pm \binom{i}{i-1} 1^n \right|.$$

En employant maintenant la formule

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} y_0^{(2n-1)},$$

qui lie les nombres de Bernoulli aux dérivées de la fonction considérée, on obtient la formule qu'on a écrite précédemment.

2. La deuxième formule pour le calcul des nombres de Bernoulli que nous allons considérer, fut attribuée à Libri par Cauchy (*Œuvres,* 2e série, t. VII, pag. 348). On peut l'obtenir immédiatement au moyen de la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!\, f^{(i)}(u)\, u'^{\alpha}\, u''^{\beta} \ldots (u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \ldots (n!)^{\lambda}},$$

où Σ représente une somme qui se rapporte aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

En appliquant, en effet, cette formule à la fonction

$$y = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = \log\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \ldots\right),$$

on trouve, en posant $n = 2m$, et

$$y = -\log u, \quad u = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \ldots,$$

l'égalité suivante :

$$\left(\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}\right)_{x=0} = \pi^{2m} \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)!\,(2m)!}{\beta!\,\delta!\ldots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^\beta \left(\frac{1}{5!}\right)^\delta,$$

où Σ représente une somme qui doit s'étendre aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\beta + 2\delta + \ldots = m,$$

et où

$$i = \beta + \delta + \ldots$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{m(2m)!} B_{2m-1} x^{2m}.$$

On trouve donc

$$B_{2m-1} = \frac{m(2m)!}{2^{2m-1}} \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)!}{\beta!\,\delta!\,\omega!\ldots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^\beta \left(\frac{1}{5!}\right)^\delta \left(-\frac{1}{7!}\right)^\omega \ldots$$

Cette formule est celle que nous nous proposions d'obtenir.

IV.

SUR UNE FORMULE D'ANALYSE.

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 3.e série, t. V. Paris, 1886).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, que je crois nouveau:

Si les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ et leurs dérivées $f'(x)$, $F'(x)$, $f''(x)$, $F''(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$, $F^{(n)}(x)$ sont finies et déterminées pour toutes les valeurs de x qui sont comprises dans l'intervalle (x_0, x), nous avons la formule

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f(x)-f(x_0)-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0)}{F(x)-F(x_0)-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^k}{k!}F^{(k)}(x_0)} \\ &= \frac{\dfrac{(x-x_0)^{i+1}}{(i+1)!}f^{(i+1)}(x_0)+\ldots+\dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x_0)+R}{\dfrac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{(k+1)}(x_0)+\ldots+\dfrac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x_0)+R'}\,; \end{aligned} \right.$$

où

$$R = \frac{(x-x_0)^m(1-\theta)^{n-1}f^{(m)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(m-1)!},$$

$$R' = \frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^{n-1}F^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n-1)!},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Pour démontrer ce théorème, considérons la fonction

$$\varphi(z)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0)$$

$$-f(z)-\frac{x-z}{1}f'(z)-\ldots-\frac{(x-z)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(z)$$

$$-\Big[\mathrm{F}(x_0)+(x-x_0)\mathrm{F}'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^k}{k!}\mathrm{F}^{(k)}(x_0)$$

$$-\mathrm{F}(z)-(x-z)\mathrm{F}'(z)-\ldots-\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{F}^{(n-1)}(z)\Big]$$

$$\times\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0)}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)-(x-x_0)\mathrm{F}'(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}\mathrm{F}^{(k)}(x_0)}.$$

En lui appliquant la formule connue

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+(x-x_0)\varphi'[x_0+\theta(x-x_0)], \tag{2}$$

on trouve le résultat

$$0=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0)$$

$$-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x_0)$$

$$-\Big[\mathrm{F}(x_0)+(x-x_0)\mathrm{F}'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^k}{k!}\mathrm{F}^{(k)}(x_0)$$

$$-\mathrm{F}(x_0)-(x-x_0)\mathrm{F}'(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{F}^{(n-1)}(x_0)\Big]$$

$$\times\frac{f(x)-f(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0)}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}\mathrm{F}^{(k)}(x_0)}$$

$$+\Big\{-\frac{(x-x_0)^{m-1}(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}[x_0+\theta(x-x_0)]+\frac{(x-x_0)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{F}^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]$$

$$\times\frac{f(x)-f(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0)}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}\mathrm{F}^{(k)}(x_0)}\Big\}(x-x_0).$$

On tire de cette égalité, la formule (1) que nous voulions démontrer, en supposant

$$m \geqq i + 1, \quad n \geqq k + 1.$$

I. Si l'on pose, dans la formule (1),

$$F(x) = (x - x_0)^n, \quad k = n - 1, \quad i = m - 1,$$

et, par conséquent,

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad F^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$F^{(n)}(x_0) = n!, \quad F^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)] = n!,$$

on a

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x_0)}{(x - x_0)^n}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(x - x_0)^{m-1}(1 - \theta)^{m-1} f^{(m)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!\,(m-1)!\,(x - x_0)^{n-1}(1 - \theta)^{n-1}}$$

et, par conséquent,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x_0)$$

$$+ \frac{(x - x_0)^m (1 - \theta)^{m-n}}{(m-1)!\,n} f^{(m)}[x_0 + \theta(x - x_0)].$$

On obtient ainsi donc la formule de Taylor avec l'expression du reste de Schlömich et Roche.

II. Si l'on pose, dans la formule (1), $i = k = n - 1 = m - 1$, on trouve

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{n-1} f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}}{F(x) - F(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{n-1} F^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}} = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{F^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}.$$

On peut voir cette formule dans le *Cours de Calcul infinitésimal* de M. Hoüel, où elle est démontrée au moyen du *Calcul intégral*.

Si l'on a

$$f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)=0,\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$F'(x_0)=0,\quad F''(x_0)=0,\quad \ldots,\quad F^{(n-1)}(x_0)=0,$$

il vient la formule bien connue

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{F(x)-F(x_0)}=\frac{f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{F^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}.$$

V.

SOBRE UNA EQUACIÓN LINEAL INDETERMINADA.

(Gaceta de Matemáticas elementales, t. II. Madrid, 1904).

Sabido es que existen diversas cuestiones de Análisis matemático donde hace falta calcular las soluciones enteras y positivas de la ecuación lineal indeterminada

$$x+y+z+\dots+t+u=m,$$

siendo m un número entero y positivo. Es, asimismo, conocido que, cuando el número de incógnitas de aquella ecuación viene dado por n, el total $N_n^{(m)}$ de las soluciones que admite la ecuación de referencia, se expresa mediante la fórmula

$$(1)\qquad N_n^{(m)}=\binom{m+n-1}{m},$$

representado por el símbolo $\binom{m+n-1}{m}$ el número de combinaciones ordinarias de $m+n-1$ elementos, tomados m á m.

La finalidad del presente trabajo consiste en presentar dos demostraciones elementales de este teorema, que consideramos nuevas, una de ellas *indirecta*, fundada en la ley del desarrollo de la potencia de un polinomio, y la otra *directa*.

1. Comecemos por la demostración apoyada en la fórmula

$$(A_1+A_2+\dots+A_n)^m=\Sigma\frac{1.2\dots m.A_1^x.A_2^y\dots A_n^u}{1.2\dots x\times1.2\dots y\times\dots\times1.2\dots u},$$

que da el desarrollo de la potencia de grado m de un polinomio, en la cual la suma Σ se refiere á las soluciones, enteras y positivas, de la ecuación lineal indeterminada

$$x+y+z+\dots+t+u=m.$$

*

Observemos, desde luego, que el número de estas soluciones es precisamente igual al número total de términos que contiene el segundo miembro de la expresada fórmula.

Esto sentado, por el desarrollo del binomio de Newton, si tiene

$$
(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)^m = \left\{
\begin{array}{l}
(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})^m \\
+ m(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})^{m-1} A_n \\
+ \binom{m}{2}(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})^{m-2} A_n^2 \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ m(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) A_n^{m-1} \\
+ A_n^m
\end{array}\right.
$$

Según esto, podremos establecer, atendiendo á la notación indicada antes,

$$N_n^{(m)} = N_{n-1}^{(m)} + N_{n-1}^{(m-1)} + N_{n-1}^{(m-2)} + \ldots + N_{n-1}^{(1)} + 1.$$

Supongamos ahora que la fórmula (1) es verdadera cuando el número de las incógnitas de la ecuación considerada sea igual á $n-1$, y demostremos que continúa siendo cierta cuando haya una incógnita más.

Se tendrá

$$N_{n-1}^{(m)} = \binom{m+n-2}{m},$$

$$N_{n-1}^{(m-1)} = \binom{m+n-3}{m-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_{n-1}^{(1)} = \binom{n-1}{1}.$$

Pero, en este caso, también tenemos

$$N_n^{(m)} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-3}{m-1} + \ldots + \binom{n-1}{1} + 1.$$

Ahora bien, la conocida relación

$$\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i},$$

que se establece en la teoría combinatoria, permite escribir las siguientes relaciones:

$$\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-2}{m-1},$$

$$\binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2},$$

. . . .

$$\binom{n}{1} = \binom{n-1}{1} + 1,$$

de las cuales se deduce

$$(2) \qquad \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-3}{m-1} + \ldots + \binom{n-1}{1} + 1,$$

y, por consiguiente,

$$N_n^{(m)} = \binom{m+n-1}{m}.$$

Luego, si la fórmula que pretendemos demostrar, se verifica cuando el número de incógnitas de la ecuación propuesta es igual á $n-1$, también seguirá verificándose en el caso de que este número sea igual á n.

Basta ahora observar que el número de soluciones, enteras y positivas, de la ecuación indeterminada

$$x + y = m$$

es evidentemente igual á $m+1$ ó $\binom{m+1}{m}$, para concluir que la referida fórmula tendrá lugar cuando sea $n=2$, y, por consiguiente, para cualquier valor entero y positivo que reciba n.

2. Pasemos ahora á exponer la segunda demostración, y con tal objeto consideremos primero el caso de la ecuación

$$x + y = m,$$

cuyo número de soluciones, enteras y positivas, ya se ha dicho, es igual á $m+1$. Tendremos, por consiguiente,

$$N_2^{(m)} = m + 1 = \binom{m+1}{m}.$$

Sea ahora la ecuación con tres incógnitas

$$x+y+z=m,$$

y observando que el total de sus soluciones es precisamente la suma de los números de soluciones de las ecuaciones

$$x+y=m, \quad x+y=m-1, \quad x+y=m-2, \quad \ldots, \quad x+y=0,$$

llegaremos á la fórmula

$$N_3^{(m)}=\binom{m+1}{m}+\binom{m}{m-1}+\ldots+\binom{2}{1}+1,$$

de la que resulta, teniendo á la vista la relación (2),

$$N_3^{(m)}=\binom{m+2}{m}.$$

Prosiguiendo del mismo modo, seremos conducidos á la fórmula

$$N_{n-1}^{(m)}=\binom{m+n-2}{m},$$

cuando se trate de la ecuación con $n-1$ incógnitas

$$x+y+z+\ldots+t=m.$$

Esto sentado, veamos si también se cumple la misma ley respecto de la ecuación

$$x+y+z+\ldots+t+u=m,$$

que tiene una incógnita más.

Para ello, observemos que el número de soluciones de esta última ecuación es igual á la suma de los números de soluciones, también enteras y positivas, de cada una de las siguientes ecuaciones con $n-1$ incógnitas:

$$x+y+z+\ldots+t=m,$$

$$x+y+z+\ldots+t=m-1,$$

$$x+y+z+\ldots+t=m-2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x+y+z+\ldots+t=0.$$

Por consiguiente, si la fórmula (1) tiene lugar, como hemos supuesto, cuando el número de incógnitas de la ecuación indeterminada sea igual á $n-1$, podemos legítimamente escribir

$$N_n^{(m)} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-3}{m-1} + \ldots + \binom{n-1}{1} + 1.$$

Si ahora tenemos presente la relación (2), resultará en definitiva

$$N_n^{(m)} = \binom{m+n-1}{m},$$

de donde concluímos que la fórmula general se cumple también cuando la ecuación lineal indeterminada contiene n incógnitas.

VI.

DE ALGUNAS SERIES QUE PUEDEN SUMARSE POR LOS MÉTODOS ELEMENTALES.

(Gaceta de Matemáticas elementales, t. II. Madrid, 1904).

1. La noción de serie, lo mismo que la mayor parte de los conceptos del análisis matemático, aparece para los alumnos en los primeros pasos de sus estudios sobre la Matemática. Así, en la teoría de la división y en la de las progresiones por cociente, encuéntrase la serie

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

demostrándose, además, que esta serie tiene por suma la expresión

$$\frac{1}{1-x},$$

siempre que x represente un número comprendido entre -1 y $+1$. Vamos ahora á presentar otro ejemplo notable de una serie que tiene la misma suma que la precedente, y que también puede estudiarse sin salirse de los dominios del Algebra elemental.

2. Consideremos la identidad

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}.$$

Si en ella cambiamos sucesivamente x por x^2, x^4, x^8, x^{16}, ..., obtendremos:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1},$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{x^4-1} - \frac{2}{x^8-1},$$

$$\frac{1}{x^8+1} = \frac{1}{x^8-1} - \frac{2}{x^{16}-1},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{x^k+1} = \frac{1}{x^k-1} - \frac{2}{x^{2k}-1},$$

donde se supone $k = 2^m$, siendo aquí m un número entero positivo.

De las igualdades precedentes se deduce esta otra

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\ldots+\frac{k}{x^k+1}+\mathrm{R},$$

designando con R la fracción

$$\frac{2k}{x^{2k}-1}.$$

Supongamos ahora que $x^2>1$ y sea $x^2=1+t$, donde $t>0$. Tendremos la relación

$$\mathrm{R}=\frac{2k}{(1+t)^k-1}=\frac{1}{t\left[1+\frac{k-1}{2!}t+\frac{(k-1)(k-2)}{3!}t^2+\ldots\right]},$$

la cual muestra que R tiende hacia cero cuando k aumenta indefinidamente. Por consiguiente, siempre que $x^2>1$, podremos establecer

$$(1)\qquad \frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{2^2}{x^4+1}+\ldots+\frac{k}{x^k+1}+\ldots$$

Si $x^2<1$, la potencia x^{2k} tiende hacia cero, y, por lo tanto, R tiene á $-\infty$ por límite cuando k aumenta indefinidamente. De esto resulta que la igualdad anterior no puede verificarse, como era fácil de prever, puesto que, en este caso, su primer miembro es negativo, mientras que el segundo es positivo.

3. Supongamos ahora que sea

$$x=\rho(\cos\theta+i.\operatorname{sen}\theta),\quad i=\sqrt{-1}.$$

Tendremos, en este caso,

$$\mathrm{R}=\frac{2k}{\rho^{2k}(\cos\theta+i.\operatorname{sen}\theta)^{2k}-1},$$

siendo fácil ver, como anteriormente, que, cuando $\rho>1$, R tiende hacia cero, siempre que k tiende hacia ∞; y que, para $\rho<1$, la cantidad R tenderá hacia $-\infty$ para valores indefinidamente crecientes de k.

Supongamos, pues, $\rho>1$, y la relación (1) dará, haciendo uso del teorema de Moivre:

$$\frac{1}{\rho(\cos\theta+i.\operatorname{sen}\theta)-1}=\frac{1}{\rho(\cos\theta+i.\operatorname{sen}\theta)+1}+\frac{2}{\rho^2(\cos 2\theta+i.\operatorname{sen}2\theta)+1}+\ldots$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\rho\cos\theta-1-i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2-2\rho\cos\theta+1}=\frac{\rho\cos\theta+1-i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2+2\rho\cos\theta+1}$$

$$+\frac{2(\rho^2\cos2\theta+1-i\rho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta)}{\rho^4+2\rho^2\cos2\theta+1}+\frac{4(\rho^4\cos4\theta+1-i\rho^4\,\mathrm{sen}\,4\theta)}{\rho^8+2\rho^4\cos4\theta+1}+\dots$$

Este desarrollo puede desdoblarse en los dos siguientes:

$$(2)\qquad \frac{\rho\cos\theta-1}{\rho^2-2\rho\cos\theta+1}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\rho\cos\theta+1}{\rho^2+2\rho\cos\theta+1}+\dfrac{2(\rho^2\cos2\theta+1)}{\rho^4+2\rho^2\cos2\theta+1}+\dots\\[2ex] +\dfrac{k(\rho^k\cos k\theta+1)}{\rho^{2k}+2\rho^k\cos k\theta+1}+\dots\end{array}\right\},$$

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2-2\rho\cos\theta+1}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2+2\rho\cos\theta+1}+\dfrac{2\rho\,\mathrm{sen}\,2\theta}{\rho^4+2\rho^2\cos2\theta+1}+\dots\\[2ex] +\dfrac{k\rho^{k-1}\,\mathrm{sen}\,k\theta}{\rho^{2k}+2\rho^k\cos k\theta+1}+\dots\end{array}\right\},$$

en las cuales se supone, como antes, que $k=2^m$.

4. La fórmula (1) puede originar desarrollos numéricos muy interesantes. Así, para $x=10$, por ejemplo, dará

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{11}+\frac{2}{101}+\frac{2^2}{10001}+\frac{2^3}{100000001}+\dots$$

En esta serie, el número de algoritmos que intervienen en el denominador de cada término, es igual al valor del numerador respectivo aumentado en una unidad.

VII.

REMARQUES SUR L'EMPLOI DE LA FONCTION $\mathrm{p}(u)$ DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch.

(Comptes rendus des scéances de la Société Royale des Sciences de Bohême. Prague, 1892).

... Je considère premièrement la fonction $\operatorname{sn} u$ et je remarque que cette fonction a, dans le parallélogramme des périodes $4\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, les pôles $i\mathrm{K}'$ et $2\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, et que les résidus correspondants sont égaux à $\frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$, k étant le module de $\operatorname{sn} u$. En lui appliquant le théorème de décomposition de M. Hermite, en prenant pour élement simple la fonction $\zeta(u)$ qui résulte de l'intégration de $-\mathrm{p}(u)\,du$, on trouve donc

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{k}\left[\zeta(u-i\mathrm{K}') - \zeta(u-2\mathrm{K}-i\mathrm{K}')\right] + \text{const.},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2 \operatorname{sn} u}{du^2} = \frac{1}{k}\left[\mathrm{p}'(u-2\mathrm{K}-i\mathrm{K}') - \mathrm{p}'(u-i\mathrm{K}')\right].$$

Mais l'égalité

$$\mathrm{p}(u) = \frac{1}{u^2} + \Sigma\left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

où

$$w = 4n\mathrm{K} + 2mi\mathrm{K}', \quad m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

donne

$$\mathrm{p}'(u) = -\Sigma \frac{2}{(u-w)^3}.$$

Nous avons donc

$$\frac{d^2 \operatorname{sn} u}{du^2} = \frac{2}{k}\left[\sum \frac{1}{\{u - 4nK - (2m+1)iK'\}^3} - \sum \frac{1}{\{u - 2(2n+1)K - (2m+1)iK\}^3}\right],$$

ou

$$\frac{d^2 \operatorname{sn} u}{du^2} = \sum \frac{2(-1)^s}{k\,[u - 2sK - (2m+1)iK]^3},$$

où la somme Σ s'étend à toutes les valeurs entières de s et m.

Du développement, qu'on vient d'obtenir, de la dérivée du seconde ordre de $\operatorname{sn} u$ on tire le développement de $\operatorname{sn} u$ au moyen de deux intégrations entre les limites 0 et u. En posant

$$2sK + (2m+1)iK' = w, \quad \left.\begin{matrix} s \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

on trouve de cette manière, en remarquant que la dérivée de $\operatorname{sn} u$ par rapport à u est égale à l'unité, le développement connu:

$$\operatorname{sn} u = u + \frac{1}{k}\Sigma(-1)^s\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right).$$

On trouvera de même les développements connus de $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$.

En passant maintenant à un autre sujet, encore relatif à la théorie des fonctions elliptiques, je vais vous présenter une manière simple de démontrer l'égalité

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

Comme la fonction $\operatorname{sn}^2 u$ admet, dans un parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$, un seul pôle iK', qui est double, et le résidu correspondant est $\frac{1}{k^2}$, nous aurons, em appliquant le théorème de M. Hermite,

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{1}{k^2}\,\wp(u - iK') + \text{const.},$$

et par conséquent

$$\operatorname{sn} u \frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \frac{1}{2k^2}\,\wp'(u - iK').$$

Considérons maintenant la fonction

$$f(u) = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

Les périodes de cette fonction sont 2K et $2i\mathrm{K}'$, et par conséquent elle admet dans un parallélogramme des périodes un seul pôle $i\mathrm{K}'$ et ce pôle est triple. Nous avons donc

$$f(u) = \frac{A_1}{u - i\mathrm{K}'} + \frac{A_2}{(u - i\mathrm{K}')^2} + \frac{A_3}{(u - i\mathrm{K}')^3} + a_0 + a_1(u - i\mathrm{K}') + \ldots$$

On a premièrement, en vertu d'un théorème bien connu relatif aux fonctions doublement périodiques, $A_1 = 0$. Ensuite, l'égalité

$$\mathrm{sn}(u - i\mathrm{K}')\,\mathrm{cn}(u - i\mathrm{K}')\,\mathrm{dn}(u - i\mathrm{K}') = -\,\mathrm{sn}(i\mathrm{K}' - u)\,\mathrm{cn}(i\mathrm{K}' - u)\,\mathrm{dn}(i\mathrm{K}' - u),$$

fait voir que le développement de $f(u)$ ne doit pas contenir de puissances du dégré pair de $u - i\mathrm{K}'$, et que par conséquent $A_2 = 0$. Nous avons donc

$$A_3 = \lim_{u = i\mathrm{K}'} (u - i\mathrm{K}')^3\,\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{ik}\cdot\frac{1}{i} = -\frac{1}{k^2}\cdot$$

J'applique maintenant le théorème de M. Hermite à la fonction $f(u)$ et je trouve

$$\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u = \frac{1}{2k^2}\,\mathrm{p}'(u - i\mathrm{K}') + \mathrm{C},$$

et, en déterminant la constante C par la condition d'être nul le premier membre de cette égalité quand $u = 0$,

$$\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u = \frac{1}{2k^2}\,\mathrm{p}'(u - i\mathrm{K}').$$

De cette égalité et de l'une des antérieures on tire

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du} = \mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u\,.$$

VIII.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE.

(Bulletin des Sciences mathématiques, 2.e série, t. XII. Paris, 1888).

Vous savez, Monsieur, que tous les Ouvrages qui s'occupent de l'Analyse présentent, pour le développement en série des intégrales, le théorème suivant:

A. *Si $\varphi(x)$, u_1, u_2, ... sont des fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et si $\varphi(x)$ peut être développée en série uniformément convergente de a jusqu'à b:*

$$\varphi(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

on a, a et b étant finies,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots \tag{1}$$

De ce théorème on tire comme corollaire le théorème suivant:

B. *Si $\varphi(x)$, $\psi(x)$, u_1, u_2, ... sont des fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et si $\varphi(x)$ peut être développée en série uniformément convergente dans le même intervalle*

$$\varphi(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

on a

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b u_1\psi(x)\,dx + \int_a^b u_2\psi(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\psi(x)\,dx + \ldots \tag{2}$$

On peut aussi commencer par établir ce théorème et ensuite en déduire le théorème (A) en posant $\psi(x) = 1$. Mon but est de vous présenter, Monsieur, quelques remarques pour dé-

montrer qu'il est bien préférable d'établir directement le théorème (B) pour profiter de quelques circonstances de sa démonstration qui restent cachées dans la demonstration du théorème (A).

Si l'on représente par R_n la somme

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots,$$

qui est une fonction continue de x, on peut écrire

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b u_1\psi(x)\,dx + \dots + \int_a^b u_n\psi(x)\,dx + \int_a^b R_n\psi(x)\,dx.$$

Or, le développement de $\varphi(x)$ étant uniformément convergent dans l'intervalle (a, b), on peut, quelque petit que soit ε, déterminer n_1 de manière que $|R_n| < \varepsilon$ pour $n > n_1$, dans l'intervalle considéré. Nous avons donc, en supposant $a > b$,

$$\left|\int_a^b R_n\psi(x)\,dx\right| < \int_a^b |R_n|\,|\psi(x)|\,dx < \varepsilon\int_a^b |\psi(x)|\,dx$$

et, par conséquent,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b R_n\psi(x)\,dx = 0.$$

Donc

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b u_1\psi(x)\,dx + \int_a^b u_2\psi(x)\,dx + \dots + \int_a^b u_n\psi(x)\,dx + \dots$$

Voici maintenant les remarques sur ce théorème que je me propose de vous communiquer:

1° Soient M la plus grande valeur de $|R_n|$ dans l'intervalle (a, b), et L la plus grande valeur de $|R_n\psi(x)|$ dans le même intervalle. La démonstration du théorème (A) fait voir que la valeur absolue de l'erreur commise quand on arrête au terme d'ordre n de la série (2) est moindre que $L(b-a)$.

La démonstration du théorème (B) donne cette même expression de l'erreur, en y remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi(x)\psi(x)$ et $\psi(x)$ par l'unité, et encore la suivante:

$$M\int_a^b |\psi(x)|\,dx.$$

qui est préférable quand on a

$$M\int_a^b |\psi(x)|\,dx < L(b-a).$$

Ainsi, par exemple, si l'on considère l'intégrale elliptique

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où $0 < a < b < 1$, et si l'on calcule au moyen de n premiers termes de la série

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_a^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}k^4\int_a^b \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots,$$

on a les deux expressions de l'erreur

$$\frac{M}{\sqrt{1-b^2}}(b-a), \quad M\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = M[\operatorname{arc}\sin b - \operatorname{arc}\sin a],$$

où

$$M = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}b^{2n} + \frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}k^{2n+2}b^{2n+2} + \ldots,$$

et par conséquent

$$M < \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}b^{2n}\frac{1}{1-k^2b^2}.$$

Si $b=1$, la première expression de l'erreur est inapplicable, parce qu'elle donne l'infini ; au contraire, la seconde donne

$$M\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin a\right).$$

De la même manière, si l'on considère l'intégrale

$$\int_a^b \frac{e^x\,dx}{x},$$

où $0 < a < b$, et si l'on calcule au moyen des n premiers termes de la série

$$\int_a^b \frac{e^x\,dx}{x} = \log\frac{b}{a} + b - a + \frac{b^2 - a^2}{1.2.2} + \dots,$$

on trouve, en posant $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$, $\psi(x) = 1$, l'expression de l'erreur

(A) $$\mathrm{L}(b - a),$$

où [1]

$$\mathrm{L} < \frac{b^{n-1}}{n!} + \frac{b^n}{(n+1)!} + \frac{b^{n+1}}{(n+2)!} + \dots$$

et par conséquent

$$\mathrm{L} < \frac{(n+1)\,b^{n-1}}{n!\,(n+1-b)};$$

en posant $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) = \frac{1}{x}$, l'expression

(B) $$\mathrm{M}\int_a^b \frac{dx}{x} = \mathrm{M}\log\frac{b}{a},$$

où

$$\mathrm{M} < \frac{(n+1)\,b^n}{n!\,(n+1-b)};$$

et, en posant $\varphi(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $\psi(x) = x$, l'expression

(C) $$\mathrm{M}_1\int_a^b x\,dx = \mathrm{M}_1\,\frac{b^2 - a^2}{2},$$

où

$$\mathrm{M}_1 < \frac{(n+1)\,b^{n-2}}{n!\,(n+1-b)}.$$

Or nous avons

$$b\,(\log b - \log a) > b - a,$$

---

[1] Nous modifions ici un peu le texte primitif pour obtenir pour le calcul des erreurs des expressions plus approchées.

et

$$b^2 - a^2 < 2b(b-a);$$

donc l'expression (C) est préférable à l'expression (A) et celle-ci à l'expression (B).

2.° Voici maintenant la seconde considération pour préférer l'établissement direct du théorème (B).

En analysant la démonstration du théorème (B), on voit qu'il est applicable quand la fonction $\psi(x)$ devient infinie ou discontinue dans un nombre limité de points de l'intervalle (a, b), si les intégrales

$$\int_a^b |\psi(x)|\, dx, \quad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx, \quad \int_a^b \psi(x)\, u_1\, dx, \quad \ldots$$

sont finies et déterminées. Au contraire le théorème (A) n'est pas alors applicable à la fonction $\varphi(x)\psi(x)$.

Ainsi, par exemple, au moyen du théorème (A), on ne peut pas trouver le développement de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

au contraire, on peut l'obtenir au moyen du théorème (B), en le généralisant comme on vient de dire, parce que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^1 \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

sont finies et déterminées.

3.° Le théorème (A) n'est pas applicable quand les limites a et b sont infinies. Au contraire, le théorème (B) est applicable, si les intégrales

$$\int_a^b |\psi(x)|\, dx, \quad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx, \quad \int_a^b \psi(x)\, u_1\, dx, \quad \ldots$$

sont alors finies et déterminées.

IX.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. GOMES TEIXEIRA A M. JULES TANNERY.

(Bulletin des sciences mathématiques, 2.e série, t. XI. Paris, 1887).

... La quantité

$$\frac{1-x^m}{1+x^m},$$

inverse de celle que vous avez considérée dans votre lettre à M. Weierstrass ([1]), donne lieu à l'observation suivante: L'identité

$$\frac{1-x^m}{1+x^m}=\frac{2(1-x)}{2(1+x)}+\frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}+\ldots+\frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

montre que la somme de la série

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

est égale à $+1$ ou à -1 suivant que l'on a

$$|x|<1 \quad \text{ou} \quad |x|>1,$$

en sorte que cette série peut jouer le même rôle que celle que vous avez considérée ([2]); mais

---

([1]) Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 102. C'est à M. Seidel (*Journal de Crelle*, t. 73; 1871) que l'on doit d'avoir remarqué quelle était la limite de cette quantité pour m infini; voir, à ce sujet, dans le tome 22 des *Mathematische Annalen*, un article de M. Pringsheim. (J. T.).

([2]) Après M. Schröder (*Schlömilch's Zeitschrift*, 22e année, p. 184). (J. T.)

on peut considérer cette série à un autre point de vue d'où elle me paraît acquérir une importance propre.

Si l'on veut former une fonction d'une variable réelle qui soit ponctuellement discontinue par la méthode de la *condensation des singularités* de Hankel, il faut construire d'abord une fonction qui soit nulle pour $x=0$, et qui tende vers deux limites différentes quand x tend vers zéro par des valeurs positives ou des valeurs négatives: or, sans recourir à la théorie des séries trigonométriques, on a une série dont les termes sont des fonctions rationnelles de x et qui satisfait aux conditions imposées: c'est précisément la série précédente dans laquelle on remplace x par $x+1$; la somme de cette série est égale, quelle que soit la variable réelle x supérieure à -1, à la limite, pour m infini, de

$$\frac{1-(x+1)^m}{1+(x+1)^m},$$

c'est-à-dire à $+1, 0$ ou -1 suivant que x est négatif, nul ou positif.

X.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Extrait d'une lettre adressée à M. Weyr.

(Comptes rendus des séances de la Société Royale des Sciences de Bohême. Prague, 1889).

Vous connaissez bien la démonstration classique de la formule

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

basée sur l'égalité

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2(1+y^2)}xdy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-x^2(1+y^2)}xdx.$$

On ne trouve pas dans les Ouvrages que je connais la démonstration rigureuse de cette égalité, et je me propose donc de considérer ici cette question.

Comme la fonction $xe^{-x^2(1+y^2)}$ est continue dans les intervalles $(0\ldots a)$ et $(0\ldots b)$, on a

$$(1)\qquad \int_0^{a} dx \int_0^{b} e^{-x^2(1+y^2)}xdy = \int_0^{b} dy \int_0^{a} e^{-x^2(1+y^2)}xdx.$$

Considérons d'abord le second membre de cette égalité. Nous avons

$$\int_0^b dy \int_0^a e^{-x^2(1+y^2)} x dx = \frac{1}{2}\int_0^b \left[1 - e^{-a^2(1+y^2)}\right] \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} b - \frac{1}{2}\int_0^b e^{-a^2(1+y^2)} \frac{dy}{1+y^2}$$

ou, en vertu du *premier théorème de la moyenne,*

$$\int_0^b dy \int_0^a e^{-x^2(1+y^2)} x dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} b - \frac{1}{2} e^{-a^2(1+y_1^2)} \operatorname{arc\,tg} b,$$

où y_1 représente une quantité comprise entre zéro et b.

Donc

$$\lim_{a=\infty,\, b=\infty} \int_0^b dy \int_0^a e^{-x^2(1+y^2)} x dx = \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Considérons maintenant le premier membre de l'égalité (1). Nous avons

$$\int_0^a dx \int_0^b e^{-x^2(1+y^2)} x dy = \int_0^\alpha dx \int_0^b e^{-x^2(1+y^2)} x dy + \int_\alpha^a dx \int_0^b e^{-x^2(1+y^2)} x dy,$$

où α représente une quantité comprise entre zéro et a; et par conséquent, en vertu du *premier théorème de la moyenne,*

$$\int_0^a dx \int_0^b e^{-x^2(1+y^2)} x dy = \int_0^b e^{-x_1^2 y^2} x_1 dy \cdot \int_0^\alpha e^{-x^2} dx + \int_0^b e^{-x_2^2 y^2} x_2 dy \cdot \int_\alpha^a e^{-x^2} dx,$$

où x_1 représente une quantité comprise entre zéro et α, et x_2 une quantité comprise entre α et a. En posant, dans cette formule, $x_1 y = z_1$ et $x_2 y = z_2$, on trouve

$$\int_0^a dx \int_0^b e^{-x^2(1+y^2)} x dy = \int_0^{x_1 b} e^{-z_1^2} dz_1 \cdot \int_0^\alpha e^{-x^2} dx + \int_0^{x_2 b} e^{-z_2^2} dz_2 \cdot \int_\alpha^a e^{-x^2} dx,$$

d'où l'on tire

$$\lim_{a=\infty,\, b=\infty} \int_0^a dx \int_0^b e^{-x^2(1+y^2)} x dy = \int_0^\alpha e^{-x^2} dx \cdot \lim_{b=\infty} \int_0^{x_1 b} e^{-z^2} dz + \int_0^\infty e^{-z^2} dz \cdot \int_\alpha^\infty e^{-x^2} dx.$$

Si maintenant on fait tendre α vers zéro et si on remarque que l'intégrale $\int_0^{\alpha} e^{-x^2} dx$ tend vers zéro et que l'intégrale $\int_0^{\alpha b} e^{-x^2} dx$ est finie, on trouve

$$(3) \qquad \lim_{a,\, b = \infty} \int_0^{a} dx \int_0^{b} e^{-x^2(1+y^2)} x\, dy = \left| \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right|^2 .$$

Les formules (2 et (3) montrent que les deux membres de (1) tendent vers des valeurs déterminées, quand a e b tendent vers l'infini; et, de-là on conclut, puisque ces limites doivent être egales,

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right|^2 = \frac{\pi}{4},$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

XI.

SUR UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

(Intermédiaire des mathématiciens, t. XII. Paris, 1905).

Considérons la fonction

$$f(n, r) = n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^r + \ldots,$$

où n et r sont entiers

Montrer que $f(n, r) = 0$ quand $r < n$ et que $f(n, n) = n!$.

Quelles sont les valeurs de $f(n, r)$ pour $r = n+1$, $n+2$, ...? [1].

* * *

Soit

$$f(n, r) = n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \ldots$$

On a

$$f(n, r) = \left(\frac{d^r (e^x - 1)^n}{dx^r}\right)_{x=0} = \left(\frac{d^r\, x^n \varphi(x)}{dx^r}\right)_{x=0},$$

où

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^m}{m+1!} + \ldots\right)^n,$$

et il suffit que l'on forme la dérivée d'ordre r du produit $x^n \varphi(x)$, au moyen de la formule de

---

(1) Question proposée par M. E. B. Escott dans l'*Intermédiaire des mathématiciens*, t. XI. p. 261.

Leibnitz, et qu'on pose ensuite $x=0$, pour obtenir les égalités

$$f(n, r) = 0 \quad (r < n),$$

$$f(n, n) = n\,!,$$

$$(1) \qquad f(n, n+i) = \binom{n+i}{i} n\,!\,\varphi^{(i)}(0).$$

Cette dernière égalité donne

$$f(n, n+1) = \binom{n+1}{1} \frac{n\,!\,n}{2},$$

$$f(n, n+2) = \binom{n+2}{2} n\,!\,n\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{12}\right),$$

. . . .

La valeur de $\varphi^{(i)}(x)$, pour $x=0$, qui entre dans la formule (1), peut être calculée de la manière suivante:

On a

$$\varphi(x) = \Sigma \frac{n\,!\,x^{\beta+2\gamma+3\delta+\ldots}}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\,\delta\,!\ldots},$$

où α, β, γ, ... représentent les solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=n;$$

et, par conséquent,

$$\varphi^{(i)}(0) = \Sigma_1 \frac{n\,!\,i\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\ldots(2\,!)^{\beta}(3\,!)^{\gamma}\ldots},$$

où Σ_1 doit s'étendre aux solutions entières, positives et nulles, des équations

$$\beta+2\gamma+3\delta+\ldots=i,$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=n.$$

XII.

SOBRE A REPRESENTAÇÃO DA FUNCÇÃO $\log \Gamma(x)$ POR UM INTEGRAL DEFINIDO.

(El Progreso matemático, t. I. Zaragoza, 1891).

Serret no seu *Calcul intégral* (p. 172–176) deduz do integral de Cauchy:

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left[(x-1)\, e^{-\alpha} - \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}} \right] \frac{d\alpha}{\alpha},$$

ou, pondo $\alpha = -\log t$,

$$(1) \qquad \log \Gamma(x) = \int_0^{1} \left[\frac{1 - t^{x-1}}{1 - t} - x + 1 \right] \frac{dt}{\log t}$$

a egualdade de Gauss

$$(2) \qquad \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1.2 \ldots n n^x}{x(x+1) \ldots (x+n)}.$$

Como porém esta egualdade se demonstra de um modo muito simples sem a consideração do integral de Cauchy, julgamos preferivel deduzir d'ella este integral, como vamos ver.

A egualdade (2) dá

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \left[x \log n + \log(1.2 \ldots n) - \log x - \lg(x+1) - \ldots - \log(x+n) \right]$$

ou por ser

$$\log n = \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \ldots + \log \frac{n}{n-1},$$

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \left[x \log \frac{2}{1} + x \log \frac{3}{2} + \ldots + x \log \frac{n}{n-1} \right.$$

$$\left. + \log \frac{1}{x} + \log \frac{1}{x+1} + \ldots + \log \frac{n}{x+n} \right].$$

Temos porém

$$\log\frac{\beta}{\alpha}=\int_0^1\frac{t^{\beta-1}-t^{\alpha-1}}{\log t}\,dt.$$

Logo

$$\log\Gamma(x)=\lim_{n=\infty}\left[x\int_0^1\frac{t-1}{\log t}\,dt+x\int_0^1 t\,\frac{t-1}{\log t}\,dt+\ldots\right.$$

$$+x\int_0^1 t^{n-2}\frac{t-1}{\log t}\,dt-\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{\log t}\,dt+\int_0^1\frac{1-t^x}{\log t}\,dt$$

$$\left.+\int_0^1 t\,\frac{1-t^x}{\log t}\,dt+\ldots+\int_0^1 t^{n-1}\,\frac{1-t^x}{\log t}\,dt\right]$$

$$=\lim_{n=\infty}\left[x\int_0^1\frac{t-1}{\log t}(1+t+t^2+\ldots+t^{n-2})\,dt-\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{\log t}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\frac{1-t^x}{\log t}(1+t+\ldots+t^{n-1})\,dt\right].$$

Mas

$$1+t+t^2+\ldots+t^{n-2}=\frac{1}{1-t}-\frac{t^{n-1}}{1-t},$$

$$1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}=\frac{1}{1-t}-\frac{t^n}{1-t}.$$

Será pois

$$\log\Gamma(x)=\lim_{n=\infty}\left[-x\int_0^1\frac{dt}{\log t}+\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{\log t}\,dt-\int_0^1\frac{1-t^x}{(1-t)\log t}\,dt\right.$$

$$\left.-x\int_0^1\frac{(t-1)t^{n-1}\,dt}{(1-t)\log t}-\int_0^1\frac{(1-t^x)\,t^n\,dt}{(1-t)\log t}\right]$$

ou

$$\log\Gamma(x)=\int_0^1\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t}-x-1\right]\frac{dt}{\log t}-\lim_{n=\infty}\int_0^1 t^{n-1}\,\frac{t^{x+1}-(x+1)\,t+x}{(t-1)\log t}\,dt.$$

O ultimo integral que entra nesta fórmula dá, attendendo ao primeiro *theorema da media*,

$$\int_0^1 t^{n-1}\,\frac{t^{x+1}-(x+1)\,t+x}{(t-1)\log t}\,dt=\mathrm{K}\int_0^1 t^{n-1}\,dt=\mathrm{K}\,\frac{1}{n},$$

K representando um numero que não é superior ao maior nem inferior ao menor dos valores que toma a funcção

$$\frac{t^{x-1}-(x-1)t-x}{(t-1)\log t}$$

quando t varia desde 0 até 1. Como esta funcção é finita neste intervallo e $\frac{1}{n}$ tende para zero quando n tende para o infinito, temos

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 t^{n-1} \frac{t^{x-1}-(x-1)t-x}{(t-1)\log t} dt = 0,$$

e portanto

$$\log \Gamma(x) = \int_0^1 \left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1 \right] \frac{dt}{\log t},$$

que é o resultado que pretendiamos demonstrar.

XIV

DOIS ARTIGOS SOBRE GEOMETRIA ANALYTICA

I.

SUR DEUX MANIÈRES DE CONSTRUIRE LES SPIRIQUES DE PERSEUS.

(Archiv der Mathematik und Physik, III Reihe, t. XI. Leipzig, 1906).

On trouve dans le tome II, p. 52, de l'édition des *Oeuvres de Huygens* publiée par la Société hollandaise des Sciences une lettre de Sluse à Huygens dans laquelle il donne une méthode pour construire les *spiriques de Perseus* au moyen d'une hyperbole équilatère. Nous allons nous occuper de cette méthode dans le premier chapitre de ce travail pour en donner une démonstration algébrique et indiquer quelques résultats qui s'y rapportent.

Dans le second chapitre nous donnons, pour la construction des mêmes courbes, une méthode bien plus simple que celle de Sluse, puisque, au lieu d'une hyperbole, nous employons une circonférence et nous dérivons chaque point de la spirique de chaque point de la circonférence, comme Sluse les dérive de l'hyperbole, au moyen de la construction d'une moyenne géométrique entre deux segments de droite.

Les résultats obtenus dans ces deux chapitres sont étendus dans le troisième chapitre aux sections de la surface engendrée par une ellipse, par une hyperbole ou par une parabole quand elle tourne autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire à l'un de ses axes.

Sur une méthode de Sluse pour construire les spiriques de Perseus au moyen d'une hyperbole.

1. On sait que l'équation des spiriques de Perseus est la suivante:

$$(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2), \tag{1}$$

où R représente la rayon de la circonférence méridienne du tore auquel appartient la spirique

considérée, c la distance du plan qui la contient à l'axe de la surface et l la distance du centre de la circonférence rapportée au même axe.

En posant dans cette équation

$$y^2 = (\lambda - y_1) y_1, \tag{2}$$

λ étant une quantité constante, on obtient la transformée suivante:

$$(x^2 - y_1^2 + \lambda y_1 + l^2 + c^2 - R^2)^2 - 4l^2 (x^2 + c^2) = 0,$$

et nous allons chercher les conditions pour que cette équation représente deux coniques.

Pour cela, le premier membre de cette équation doit être réductible à la forme

$$(x^2 + Ay_1^2 + By_1 + C)(x^2 + A'y_1^2 + B'y + C'),$$

ce qui donne les équations de condition

$$AA' = 1, \quad A + A' = -2,$$
$$C + C' = 2(c^2 - l^2 - R^2),$$
$$CC' = (l^2 + c^2 - R^2)^2 - 4l^2 c^2,$$
$$B + B' = 2\lambda,$$
$$BB' + A'C + CA' = \lambda^2 - 2(l^2 + c^2 - R^2),$$
$$B'C + BC' = 2\lambda (l^2 + c^2 - R^2),$$
$$AB' + BA' = -2\lambda.$$

Or, les deux premières équations donnent

$$A = -1, \quad A' = -1;$$

la troisième et la quatrième donnent

$$C = c^2 - l^2 - R^2 + 2lR,$$
$$C' = c^2 - l^2 - R^2 - 2lR;$$

ensuite la cinquième et la sixième donnent

$$B = \lambda - 2l, \quad B' = \lambda + 2l,$$

et enfin la septième donne

$$\lambda = 2R.$$

La dernière équation n'est pas distincte des précédentes.

Donc le lieu considéré se réduit à deux coniques quand $\lambda = 2R$, et les équations de ces coniques sont les suivantes:

$$(3) \qquad x^2 - y_1^2 + 2(R - l)y_1 + c^2 - l^2 - R^2 + 2lR = 0,$$

$$x^2 - y_1^2 + 2(R + l)y_1 + c^2 - l^2 - R^2 - 2lR = 0.$$

Ces deux équations peuvent être réduites à la forme

$$(4) \qquad y_2^2 - x^2 = c^2,$$

en posant dans la première $y_1 = y_2 + R - l$ et dans la deuxième $y_1 = y_2 + R + l$. Elles représentent donc deux hyperboles équilatères dont les axes sont égaux à $2c$, ayant la première le centre au point $(0,\ R - l)$ et l'autre au point $(0,\ R + l)$.

En changeant dans l'analyse précédente la valeur de B contre celle de B', c'est-à-dire en posant

$$B = \lambda + 2l, \quad B' = \lambda - 2l,$$

on trouve deux nouvelles hyperboles, symétriques des précédentes par rapport à l'axe des abscisses, qui correspondent à $\lambda = -2R$.

On conclut de tout ce qui précède qu'il existe *quatre hyperboles égales* telles que à chacun de leurs points correspond un point de la spirique considérée lequel est lié à celui-là par la relation (2), où $\lambda = 2R$ ou $\lambda = -2R$.

Ce résultat pouvait être prévu, puisque le second membre de l'équation (2) ne change pas de valeur quand on y remplace y_1 par $\lambda - y_1$, ni quand on y remplace λ par $-\lambda$ et y_1 par $-y_1$. Cette circonstance fait encore voir que, pour obtenir tous les points de la spirique, il ne faut pas d'employer plus d'une des hyperboles considérées.

2. Il résulte de la relation

$$(5) \qquad y^2 = (2R - y_1)y_1$$

que les points de l'hyperbole auxquels correspondent les points réels de la spirique sont ceux qui sont compris entre les droites représentées par les équations

$$y_1 = 0, \quad y_1 = 2R.$$

1.° Si les deux droites coupent une même branche de l'hyperbole, la courbe est formée par deux ovales extérieurs l'un à l'autre.

2.° Si une seule de ces droites coupe l'hyperbole, la spirique se réduit à un ovale.

3.° Si l'une des deux droites coupe la branche supérieure de l'hyperbole et l'autre la branche inférieure, la spirique est formée par deux ovales dont l'un est à l'intérieur de l'autre.

Dans tous ces cas les sommets de la spirique correspondent aux points où les droites coupent l'hyperbole et aux sommets de cette courbe compris entre les droites.

Les conditions pour que les droites considérées coupent l'hyperbole peuvent être traduites par des inégalités, que nous ne nous arrêterons pas à déduire, lesquelles coïncident avec les conditions connues pour que la spirique ait une ou deux branches.

3. Si l'on pose dans l'équation (5) $y_1 = R$, il vient $y = \pm R$. On voit donc que la spirique et l'hyperbole se coupent dans les points correspondants à $y_1 = R$, lesquels sont réels quand à $y_1 = R$ correspond un point réel de l'hyperbole, c'est-à-dire quand $c \gtrless l$.

D'un autre côté, les points où les ordonnées de la spirique passent par une valeur maxime sont donnés par l'équation

$$(y_1 - R)\, y_1' = 0,$$

qui résulte de (5), dont une solution est $y_1 = R$.

L'hyperbole passe donc par les deux points de la spirique, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, où les ordonnées de cette courbe ont une valeur *maxime*.

4. On peut tracer les normales à la spirique considérée au moyen des normales et des tangentes à l'hyperbole. En effet, l'équation (5) donne la suivante

$$yy' = Ry_1' - y_1 y_1',$$

qui détermine la sous-normale de la spirique au point (x, y), quand on connaît la sous-normale de l'hyperbole au point correspondant (x, y_1) et le segment de droite, dépendante de la tangente à l'hyperbole au même point, représenté par Ry_1'.

5. Les hyperboles qui correspondent aux diverses valeurs de c, c'est-à-dire aux diverses sections du tore, forment une surface dont l'équation est la suivante:

$$x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 + 2(R - l)\, y_1 = (R - l)^2.$$

Cette surface est donc un cône de révolution, dont l'axe coïncide avec l'axe du tore, et qui coupe cette surface dans son équateur et dans le cercle parallèle plus élevé.

Il en résulte que à chaque point du cône représenté par l'équation précédente correspond un point du tore lié au premier par les relations

$$x = x_1, \quad y^2 = (2R - y_1)\, y_1, \quad z = z_1.$$

Sur une manière de construire les spiriques de Perseus au moyen d'une circonférence.

6. On vient de voir que, dans la méthode de Sluse, les points de la spirique sont dérivés de ceux d'une hyperbole au moyen de la construction d'une moyenne géométrique entre deux segments de droite. Nous allons donner maintenant une autre méthode, plus simple que la précédente, pour construire la spirique considérée, dans laquelle on déduit chaque point de cette courbe d'un point correspondant d'une circonférence en construisant aussi une moyenne géométrique entre deux segments de droite. Cette méthode se présente d'une manière très naturelle, mais nous ne l'avons pas trouvée dans les travaux sur les spirique que nous avons pu voir.

Considérons encore l'équation de la spirique

$$(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2)$$

et posons

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

Il vient

$$(6) \qquad (x_1 \pm l)^2 + y^2 = R^2.$$

On voit donc que la relation précédente transforme la spirique considérée en deux circonférences de rayon égal à R, ayant leurs centres aux points $(\pm l, 0)$, et que à chaque point (x_1, y) de ces circonférences correspond un point de la spirique, ayant la même ordonnée et une abscisse égale à la moyenne géométrique entre $x_1 - c$ et $x_1 + c$. Il convient de remarquer que, pour faire la construction de la courbe, il suffit d'employer une des circonférences considérées, puisque la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On trouve aisément la forme que la spirique prend dans les divers cas qui peuvent se présenter.

1.° Si les circonférences ne coupent pas l'axe des ordonnées *(tore couvert)* et la droite représentée par l'équation $x = c$ est comprise entre ces circonférences, la spirique est formée par deux ovales, qui ont quatre sommets sur l'axe des abscisses, lesquels correspondent aux points où les circonférences considérées coupent cet axe. Aux quatre points où les tangentes aux circonférences sont parallèles à l'axe des abscisses correspondent quatre points où les tangentes à la spirique sont parallèles au même axe.

2.° Si le tore est ouvert et la droite $x = c$ coupe une des circonférences, la spirique se réduit à un ovale, qui a deux sommets sur l'axe des ordonnées, lesquels correspondent aux points où cette droite coupe la circonférence considérée, et deux sommets sur l'axe des abscisses,

qu'on obtient comme au cas précédent. Si la droite coupe la demi-circonférence plus prochaine de l'axe des ordonnées, la courbe a quatre points où les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses, qui correspondent aux points des circonférences où les tangentes sont parallèles à cet axe. Mais, si la droite coupe l'autre demi-circonférence, ces points devienent imaginaires.

3.° Si le tore est ouvert et une des circonférences est comprise entre l'axe des ordonnées et la droite $x = c$, la courbe est imaginaire.

4.° Si les circonférences coupent l'axe des ordonnées (*tore fermé*), la spirique est formée par deux ovales, quand les droites $x = c$ et $x = -c$ coupent l'une des circonférences considérées, par un seul ovale, quand une seul de ces droites coupe cette circonférence, et elle est imaginaire quand ni l'une ni l'autre la coupent. On détermine les sommets de ces ovales et les points où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses comme dans les cas précédents.

7. On peut tracer d'une manière très facile les normales à la spirique au moyen des normales aux circonférences considérées. En effet, on a

$$x \frac{dx}{dy} = x_1 \frac{dx_1}{dy},$$

et, par conséquent, les sous-normales de la spirique et de la circonférence, par rapport à l'axe des ordonnées, sont égales. Les normales à ces deux courbes aux points correspondants coupent donc l'axe des ordonnées dans le même point.

8. Les circonférences qui entrent dans les constructions précédentes ne dépendent pas de c, et sont égales à la circonférence méridienne du tore considéré. De là et de ce qu'on vient de dire au n.° 7 il résulte que les normales aux diverses spiriques qui correspondent aux valeurs données à c, menées par les points où elles coupent une droite parallèle à l'axe des abscisses, coupent l'axe des ordonnées en deux points, l'un qui correspond aux points des spiriques où la convexité est tournée vers le côte des abscisses positives et l'autre qui correspond aux points de ces courbes qui ne satisfont pas à cette condition.

Il résulte de ce qui précède que, si un plan se déplace parallèlement à un plan fixe qui passe par l'axe du tore, les normales aux spiriques qui en résultent, aux points du même parallèle de la surface, se coupent sur deux droites qui passent par l'axe du tore et sont perpendiculaires à cette axe. Les lieux géométriques de ces normales sont donc des *conoïdes*.

On trouve facilement l'équation de ces conoïdes.

En effet, l'équation des normales aux spiriques qui correspondent au même point (α, β) de la circonférence considérée ci-dessus est la suivante:

$$xY(l^2 - \beta^2 - \alpha^2 + R^2) + \beta X(\alpha^2 + \beta^2 + l^2 - R^2) = 2l^2 x\beta,$$

où $x = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$.

Si l'on représente donc par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface dont on veut chercher l'équation, on a

$$xy'(l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2)+\beta x'(\alpha^2+\beta^2+l^2-R^2)=2l^2x\beta.$$

Mais, comme le point (x, β, z') doit être placé sur le tore, on a

$$(x^2+\beta^2+l^2+z'^2-R^2)^2=4l^2(x^2+z'^2).$$

En éliminant maintenant x entre cette équation et la précédente, on obtient l'équation demandée.

On peut donner à cette équation sa forme plus simple en transportant l'origine des coordonnées au point dont les coordonnées, rapportées aux axes primitifs, sont $(0, \omega, 0)$, en supposant

$$\omega=\frac{2l^2\beta}{l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2}.$$

On trouve alors

$$\left|K^2\left(\frac{x'}{y'}\right)^2+\beta^2+l^2+z'^2-R^2\right|^2=4l^2\left|K^2\frac{x'^2}{y'^2}+z'^2\right|,$$

où

$$K=\frac{\beta(\alpha^2+\beta^2+l^2-R^2)}{l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2}.$$

A ce qui précède nous ajouterons encore que les tangentes aux spiriques placées sur les plans parallèles au plan fixe mentionné ci-dessus, aux points du même parallèle du tore, forment des cylindres tangentes à cette surface en tous les points de ce parallèle.

Sur l'extension des méthodes précédentes à quelques autres courbes.

9. Tout ce qu'on vient de dire dans les n.^{os} précédents est applicable à la courbe définie par l'équation

$$(x^2+y^2+l^2-c^2-R^2)^2=4l^2(x^2-c^2), \tag{7}$$

qui ne diffère de (1) que par le signe de c^2. Ainsi on peut construire cette courbe au moyen de l'hyperbole

$$x^2-y_2^2=c^2,$$

conjuguée de celle qui a été considérée précédemment, et au moyen de la relation

$$y^2 = (2R - y_1)\, y_1 ;$$

et on peut la construire aussi au moyen de la circonférence

$$(x_1 + l)^2 + y^2 = R^2$$

et de la relation

$$x^2 = x_1^2 + c^2.$$

La courbe représentée par l'équation (7) peut être considérée comme la section du tore par le plan imaginaire $y = c\sqrt{-1}$. Ses points réels correspondent aux points imaginaires du tore. On peut l'appeler *pseudo-spirique.*

10. Tout ce qu'on a dit précédemment à l'égard des sections du tore peut être étendu aux sections de la surface engendrée par une ellipse, quand elle tourne autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire á l'un de ses axes.

L'équation de ces sections est la suivante:

$$(a^2 y^2 + b^2 x^2 + b^2 c^2 + b^2 l^2 - a^2 b^2)^2 = 4 b^4 l^2 (x^2 + c^2),$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse, l la distance de son centre à l'axe de révolution et c la distance du plan de la section au même axe; et l'on voit, en procédant comme dans le cas des spiriques, que ces courbes peuvent être construites au moyen de l'hyperbole.

$$b^2 x^2 - a^2 y_1^2 + 2ab(a - l)\, y_1 + b^2 [c^2 - (l - a)^2] = 0$$

et de la relation

$$y^2 = (2b - y_1)\, y_1 ,$$

ou au moyen de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 (x_1 - l)^2 = a^2 b^2$$

et de la relation

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

Les conséquences de ces constructions données précédemment pour le cas des spiriques, peuvent être étendues facilement aux courbes plus générales qu'on vient de définir.

11. En changeant dans ce qui précède b^2 en $-b^2$ on trouve des résultats applicables

aux sections de la surface engendrée par le movement d'hyperbole autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire à l'un de ses axes.

12. Une des constructions qu'on vient de considérer est aussi applicable aux sections de la surface engendrée par la parabole

$$y^2 = 2px + q,$$

quand elle tourne autour de l'axe des ordonnées, par des plans parallèles à l'axe de révolution.

Il est facile de voir que l'équation de ces courbes est la suivante:

$$(y^2 - q)^2 = 4p^2(x^2 + c^2),$$

et qu'elles peuvent donc être construites au moyen de la parabole

$$y^2 = 2px_1 - q$$

qui coïncide avec la parabole donnée, et de la relation

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

II.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA STROPHOÏDE ET SUR LES CUBIQUES QUI COÏNCIDENT AVEC LEURS CISSOÏDALES

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 4.e série, t. VI. Paris, 1906).

Nous allons donner, dans la première partie de ce travail, une propriété de la strophoïde qui nous paraît intéressante et qui n'a pas été encore remarquée, croyons-nous. Ensuite, en généralisant le résultat obtenu, nous chercherons les cubiques qui coïncident avec les cissoïdales d'elles-mêmes et d'une droite ou d'une circonférence.

I.

Rappelons d'abord un théorème de M. de Longchamps dont nous ferons usage. Ce théorème a été obtenu par une voie purement géométrique par ce savant géomètre; mais on peut le démontrer aussi clairement par l'analyse, comme on va voir.

Considérons une courbe quelconque C, *une droite* D *et un point* O, *non situé sur cette droite, et menons par* O *une autre droite arbitraire* D_1. *Soient* R *et* S *les points où* D_1 *coupe la courbe et la droite* D, *respectivement;* ρ_1 *et* ρ_2 *les vecteurs de ces points, rapportées à l'origine* O, *et* M *un point de* D_1 *dont le vecteur* ρ *soit égal à la différence* $\rho_2 - \rho_1$. *Le lieu des positions que* M *prend quand* D_1 *varie, en passant toujours par* O, *est une courbe nommée, comme on sait,* cissoïdale *de la courbe* C *et de la droite* D *par rapport au point* O, *que nous nommerons* pôle.

Cela posé, prenons pour origine des coordonnées le point O, et pour axe des abscisses la perpendiculaire à D qui passe par ce point, et représentons par θ l'angle formé par D_1 avec cet axe, par (x, y) les coordonnées de M, par (x_1, y_1) les coordonnées de R et par a la distance de O à la droite D. On a alors

$$x = a - \rho_1 \cos\theta, \quad y = a \operatorname{tang}\theta - \rho_1 \sin\theta,$$

$$x_1 = \rho_1 \cos\theta, \qquad y_1 = \rho_1 \sin\theta;$$

et par conséquent les équations de la tangente à la cissoïdale au point M et de la tangente à la courbe C au point R sont les suivantes:

$$(\rho_1 \sin\theta - \rho_1' \cos\theta)\, y - \left(\rho_1' \sin\theta + \rho_1 \cos\theta - \frac{a}{\cos^2\theta}\right) x = \frac{2a\rho_1}{\cos\theta} - \rho_1^2 - \frac{a^2}{\cos^2\theta},$$

$$(\rho_1' \cos\theta - \rho_1 \sin\theta)\, y - (\rho_1 \cos\theta + \rho_1' \sin\theta)\, x = -\rho_1^2,$$

où ρ_1' représente la dérivée de ρ_1 par rapport à θ.

On voit, au moyen de ces équations, que les coordonnées y_1 et y_2 des points où ces tangentes coupent la droite D sont déterminées par ces équations

$$y_1 = \frac{(2a\rho_1 - \rho_1^2)\cos\theta - a\cos\theta\,(\rho_1' \sin\theta + \rho_1 \cos\theta)}{(\rho_1 \sin\theta - \rho_1' \cos\theta)\cos\theta},$$

$$y_2 = \frac{\rho_1^2 - a(\rho_1 \cos\theta + \rho_1' \sin\theta)}{\rho_1 \sin\theta - \rho_1' \cos\theta}.$$

On a aussi, en représentant par y_3 l'ordonnée du point où la droite D_1 coupe D,

$$y_3 = a \operatorname{tang} \theta.$$

Il résulte de ces équations l'identité

$$y_1 - y_2 = 2(y_3 - y_2),$$

au moyen de laquelle on voit que *la droite qui passe par O et par le point (x, y) de la cissoïdale coupe la droite donnée D en un point équidistant de ceux où elle est coupée par la tangente à la cissoïdale au point (x, y) et par la tangente à la courbe C au point (x_1, y_1).*

Ce théorème est celui que nous nous proposions de démontrer analytiquement. Il a été communiqué en 1885 par M. de Longchamps à l'Association française pour l'avancement des sciences, au Congrès de Grenoble.

II.

Appliquons maintenant ce théorème à la strophoïde.

Considérons une droite L, et deux points A et B, dont le premier soit situé sur cette droite. Si par le point B on mène des droites qui coupent L, et si l'on prend sur chacune, á

partir du point K d'intersection, deux segments KM et KM_1 tels qu'on ait

$$KM = KM_1 = KA,$$

le lieu des points M et M_1 qu'on obtient est, comme on sait bien, une strophoïde [1]. On sait aussi que la distance du point B à la droite L est égale à la distance de L à l'asymptote réelle, laquelle est parallèle à L. On a donc, en représentant par H le point d'intersection de la droite MM_1 avec cette asymptote,

$$BM + BM_1 = 2BK = BH.$$

On voit au moyen de cette relation qu'une partie de la cubique considérée est la cissoïdale de l'autre partie et de l'asymptote, et que, par conséquent, *les tangentes à la strophoïde aux points* M *et* M_1 *coupent l'asymptote en deux points équidistants de celui où elle est coupée par la droite* BK.

Ce théorème est celui que nous nous proposions d'établir: il en résulte les corollaires suivants:

1° *La tangente à la strophoïde au point* B *passe par le point où cette cubique coupe son asymptote réelle.*

2° *Les deux points de la strophoïde où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle sont situés sur une droite qui passe par* B.

III.

La strophoïde n'est pas la seule cubique qui jouisse de la propriété de coïncider avec une cissoïdale d'elle-même et d'une droite par rapport à un point de la cubique. Nous allons chercher les cubiques qui satisfont à cette condition.

Prenons pour origine des coordonnées le pôle de la cissoïdale et pour axe des coordonnées une parallèle à la droite donnée, et considérons l'équation générale des cubiques:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky = 0$$

ou, en posant

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

---

[1] On peut voir la théorie de cette cubique dans notre *Tratado de las curvas especiales notables*, ouvrage couronné et publié par l'Académie des Sciences de Madrid (Madrid, 1906, p. 16).

pour la rapporter aux coordonnées polaires,

$$(A\cos^3\theta + B\cos^2\theta\sin\theta + C\cos\theta\sin^2\theta + D\sin^3\theta)\rho^2$$
$$+ (E\cos^2\theta + F\cos\theta\sin\theta + G\sin^2\theta)\rho + H\cos\theta + K\sin\theta = 0.$$

En représentant par ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation, on a

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{E\cos^2\theta + F\cos^2\theta\sin\theta + G\sin^2\theta}{A\cos^3\theta + B\cos^2\theta\sin\theta + C\cos\theta\sin^2\theta + D\sin^3\theta}.$$

Supposons maintenant que l'équation de la droite donnée soit $x = a$, ou en coordonnées polaires

$$\rho' = \frac{2}{\cos\theta}.$$

La condition pour que la cubique coïncide avec la cissoïdale d'elle-même et de cette droite, c'est qu'on ait identiquement

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho',$$

ou, par conséquent,

$$E + F\,\mathrm{tang}\,\theta + G\,\mathrm{tang}^2\theta = -a(A + B\,\mathrm{tang}\,\theta + C\,\mathrm{tang}^2\theta + D\,\mathrm{tang}^3\theta),$$

quelle que soit la valeur de θ. Cette condition est donc exprimée par les équations

$$E = -aA, \quad F = -aB, \quad G = -aC, \quad D = 0,$$

au moyen desquelles on voit que l'équation de la cubique doit avoir la forme

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(x - a) + Hx + Ky = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

La condition pour qu'une cubique soit la cissoïdale d'elle-même et d'une droite est qu'une de ses asymptotes coïncide avec cette droite et que les deux autres se coupent en un point de la cubique. Ce point est alors le pôle de la cissoïdale.

Il résulte de ce qui précède cet autre théorème, qui contient celui relatif à la strophoïde, précédemment énoncé:

Si deux asymptotes d'une cubique se coupent en un point de cette courbe, et si par ce point on mène une droite quelconque D, les tangentes à la cubique aux points où elle est coupée par cette droite rencontrent la troisième asymptote en deux points équidistants du point d'intersection de D avec cette dernière asymptote.

*

Une classe très importante de cubiques auxquelles ces théorèmes sont applicables est celle des *cubiques circulaires qui passent par leur foyer singulier*. Cette classe de cubiques comprend, en effet, les cubiques considérées par Van Rees et Chasles dans leurs études sur les focales du cône de base circulaire oblique (*Correspondance mathématique de Quetelet*, t. v e vi).

IV.

Voici encore une autre question analogue à la précédente:

Chercher les cubiques qui sont cissoïdales d'elles-mêmes et d'une circonférence par rapport à un point où la cubique et la circonférence se coupent

En prenant ce point pour origine des coordonnées et la droite qui passe par le centre de la circonférence pour axe des abscisses, l'équation polaire de cette courbe est

$$\rho' = 2a\cos\theta,$$

et l'identité

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho'$$

donne, au moyen d'une analyse semblable à celle qui fut employée précédemment, les conditions

$$E = -2aA, \quad F = -2aB, \quad E = -2aC, \quad F = -2aD, \quad G = 0.$$

L'équation de la cubique doit donc avoir la forme

$$(x^2 + y^2 - 2ax)(Ax + By) + Hx + Ky = 0.$$

Nous avons le théorème suivant:

Les conditions pour qu'une cubique soit cissoïdale d'elle-même et d'une circonférence par rapport au point où ces courbes se coupent sont les suivantes: 1° que la cubique soit circulaire; 2° que le pôle coïncide avec le point où la cubique est coupée par son asymptote réelle; 3° que le centre de la circonférence coïncide avec le foyer singulier de la cubique.

FIM DO VOLUME SEGUNDO

INDICE

I

Pag.

Notes sur deux théorèmes d'Abel relatifs à l'intégration des différences finies (Acta mathematica, t. XXVIII. Stockholm, 1904) 1

II

Sur la décomposition des fractions rationnelles (Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, tt. I e II). Coimbra, 1877 e 1878 11

III

Varios artigos sobre diversas questões d'Analyse 43

I — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite (Bulletin des Sciences mathématiques, 2.e série, t. XVII). Paris 1893 45

II — Sur une formule d'interpolation (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 2.e série, t. X). Liège, 1883 48

III — Sur la formule de Stirling (Nouvelles Annales de mathématiques, 3.e série, t. X). Paris, 1891 53

IV — Sobre la teoria de logaritmos (Gaceta de Matematicas elementales, t. I). Vitoria, 1903 58

V — Sur la fonction p (u) (Bulletin des Sciences mathématiques, 2.e série, t. XVI). Paris, 1892 63

VI — Remarques sur un travail publié par N. Bougaiév (Bulletin de la Société phisico-mathématique de Kasan, 2.e série, t. XIII). Kasan, 1903 67

VII — Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle (Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris, 3.e série, t. II). Paris, 1885 71

VIII — Deuxième Note sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle (Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris, 3.e série, t. III). Paris, 1886 74

IX — Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation (Journal für die reine und angwandte Mathematik, gegründet von Crelle, Band C.). Berlin, 1887 77

X — Sur la réduction des intégrales elliptiques (Bulletin de la Société Royale des Sciences de Bohême). Prague, 1888 81

XI — Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3.e série, t. IV). Paris, 1885 86

XII — Sur un formule trigonométrique d'interpolation (L'Enseignement mathématique, t. VI). Genève, 1904 94

IV

Pag

Integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem. (Dissertação apresentada á Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra para obter o grau de doutor). Coimbra, 1875 99

Introducção 101

Capitulo I — Theoria dos integraes das equações ás derivadas parciaes 104

Capitulo II — Transformações das equações ás derivadas parciaes 117

Capitulo III — Equações de Monge e Ampère 127

Capitulo IV — Sobre algumas equações em que as derivadas de segunda ordem entram em grau superior ao primeiro 143

Capitulo V — Breves reflexões sobre a integração das equações simultaneas 153

Nota 156

V

Tres artigos sobre as equações ás derivadas parciaes 154

I — Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles (Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2.e série, t. II). Bordeaux, 1878 159

II — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. CXIII). Paris, 1881 165

III — Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (Bulletins de l'Académie Royale des Sciences de Belgique, 3.e série, t. III). Bruxelles, 1882 167

VI

Sobre o emprego dos eixos coordenados obliquos na Mecanica Analytica. (Dissertação apresentada á Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra para o concurso a um logar de lente da mesma Faculdade). Coimbra, 1876 177

Introducção 179

Capitulo I — Equilibrio dos systemas de forças 181

Capitulo II — Sobre o equilibrio dos solidos 187

Capitulo III — Sobre os principios geraes da dynamica 201

VII

Sur les nombres de Bernoulli (American Journal of Mathematics, t. VII). Baltimore, 1885 213

VIII

Pag.

Sur la série de Lagrange et ses applications (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Classe des Sciences). Bruxelles, 1904 223
Introduction 225
I — Sur l'application de la formule de Lagrange au développement des fonctions algébriques 227
II — Sur quelques développements particuliers 239
III — Sur le calcul des coefficients 248

IX

Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires (Annali di Matematica, série 3.e, t. XII. Milano, 1904 253
Introduction 255
I — Sur la détermination des centres d'inversion des cubiques circulaires 256
II — Sur la détermination des centres d'inversion des quartiques bicirculaires 260
III — Sur une manière de construire les quartiques bicirculaires unicursales 265

X

Sur un problème de Gauss et une classe particulière de fonctions symétriques (Giornale di Matematiche, t. XLIII. Napoli, 1904 275
Introduction 277
I — Solution du problème de Gauss précédemment énoncé et calcul des fonctions symétriques auxquelles il conduit 280
II — Application au développement des fonctions rationnelles en série 300
III — Sur les valeurs que prennent en quelques cas particuliers les fonctions symétriques considérées 306

XI

Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus (Journal für die reine und angwandte Mathematik, begründet von Crelle, Band CXXXI). Berlin, 1906 321
Introduction 323
I — Sur quelques intégrales définies 324
II — Sur quelques relations entre les nombres de Bernoulli et entre les nombres d'Euler 329

XII

Alguns artigos sobre diversas questões de Geometria analytica 237
I — On the rectification of Booth's logarithmic ellipse and logarithmic hyperbola (The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. XXXVII. London, 1904 239
II — Sobre una propriedad de las cúbicas circulares (Revista trimestral de Matemáticas, t. IV). Zaragoza, 1904 344

Pag.

III — Nota sull'applicazione del theorema di Fagnano agli archi della lumaca di Pascal e della sinussoide (Periodico di Matematica, t. XIX). Livorno, 1904 346
IV — Sur le nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe par un point situé sur la courbe (L'Enseignement mathématique, t. VII). Genève, 1905 350
V — Sur les transformations linéaires (Mathesis, t. XXVI). Gand, 1906 353
VI — Sur quelques propriétés des cubiques (Niew Archief voor Wiskunde, tweede reeks, VII). Amsterdam, 1906 356

XIII

Diversos artigos sobre Analyse mathematica 359
I — Sur une formule pour le calcul numérique des logarithmes (Nouvelles Annales de Mathématiques, 4.e série, t. V). Paris, 1905 361
II — Sur quelques intégrales définies (Archiv der Mathematik und Physik, III Reihe, IX). Leipzig, 1905 366
III — Sur les démonstrations de deux formules pour le calcul des nombres de Bernoulli (L'Enseignement mathématique, t. VII). Genève, 1905 371
IV — Sur une formule d'Analyse (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3.e série, t. V). Paris, 1886 375
V — Sobre una ecuación lineal indeterminada (Gaceta de Matemáticas elementales, t. II). Madrid, 1904 379
VI — De alcunas series que puedem sumar-se por los métodos elementales (Gaceta de Matemáticas elementales, t. II). Madrid, 1904 384
VII — Remarques sur l'emploi de la fonction $\wp(u)$ dans la théorie des fonctions elliptiques (Comptes rendus des séances de la Société Royale des Sciences de Bohême). Prague, 1892 387
VIII — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite (Bulletin des Sciences mathématiques, 2.e série, t. XII). Paris, 1888 390
IX — Extrait d'une lettre de M. Gomes Teixeira à M. Jules Tannery (Bulletin des Sciences mathématiques, 2.e série, t. XI). Paris, 1887 395
X — Sur l'intégrale $\int_0^x e^{-x^2}dx$ (Comptes rendus des séances de la Société Royale des Sciences de Bohême). Prague, 1889 397
XI — Sur une fonction numérique (Intermédiaire des mathématiciens, t. XXII). Paris, 1905 400

XIV

Dois trabalhos sobre Geometria analytica plana 405
I — Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus (Archiv der Mathematik und Physik, III Reihe, t. XI). Leipzig, 1906 407
II — Sur une propriété de la strophoïde et sur les cubiques qui coïncident avec leurs cissoïdales. (Nouvelles Annales de mathématiques, 4.e série, t. VI). Paris, 1906 416